

TEUBNERS LEITFÄDEN FÜR DEN MATHEMATISCHEN UND TECHNISCHEN HOCHSCHULUNTERRICHT

In Bänden zu 8—10 Bogen. 8. In Leinwand geb.

Diese Leitfäden sind als Begleiter der Studierenden an Technischen Hochschulen und Universitäten in die einführenden Vorlesungen und als Vorbereitungsbücher zum Examen gedacht. Besondere Sorgfalt wurde darum auf klare Gliederung des Stoffes gelegt. Nach Vollständigkeit streben „Teubners Leitfäden“ viel weniger als nach Leichtfaßlichkeit und praktischer Verwendbarkeit. Der neueste Stand der Forschung und neuzeitliche Forderungen sollen stets berücksichtigt werden. Reiche Figurenausstattung und zuverlässiges Zahlenmaterial werden den Wert dieser Leitfäden nach Möglichkeit erhöhen und sie auch zum Gebrauch in den Übungen und zur gelegentlichen Verwendung durch den Praktiker geeignet machen.

Diese Anlage der Sammlung entspricht einem wirklichen Bedürfnis. Dies geht vor allen Dingen aus der erfreulichen Tatsache hervor, daß außer den unten angegebenen Autoren noch verschiedene andere bedeutende Fachmänner sich zur Übernahme weiterer Bändchen bereit erklärt haben.

DARSTELLEND E GEOMETRIE

Von Dr. M. Großmann

Professor an der Eidgen. Technischen Hochschule Zürich

Mit 109 Figuren. [VI u. 138 S.] 1915. M. 2.80

Bei der Auswahl des Stoffes für das Bändchen „Darstellende Geometrie“ von „Teubners Leitfäden“ ließ sich der Verfasser von der Erwägung leiten, daß die darstellende Geometrie an den Technischen Hochschulen in erster Linie als Methode zu lehren ist, die vom Stoff mehr oder weniger unabhängig ist, und deren Wirkungen — die Förderung der Raumanschauung und die Erziehung zum sicheren und genauen Konstruieren — nachhalten sollen, auch wenn die Einzelheiten des Stoffes aus dem Gedächtnis verdrängt worden sind. — Der erste Teil umfaßt die konjugierten Normalprojektionen, die orthogonale und schiefe Axonometrie, die Zentralprojektion und Perspektive und die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie; die Elemente der darstellenden Geometrie werden, da sie gewöhnlich schon im Schulunterricht der Oberstufe gelehrt werden, als bekannt vorausgesetzt. Der zweite Teil behandelt die allgemeinen Eigenschaften der Kurven und Flächen, die topographische Fläche, die Zylinder- und Kegelflächen mit Einschluß der projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte, die Rotations-, Regel- und Schraubenflächen, die Flächen zweiten Grades.

ANALYTISCHE GEOMETRIE

Von Dr. R. Fricke

Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig

Mit 96 Figuren im Text. [VI u. 135 S.] 1915. M. 2.80.

Die hier gebotene Darstellung der Elemente der „Analytischen Geometrie“ ist zwar aus Vorlesungen, die an einer Technischen Hochschule gehalten sind, hervorgegangen; doch dürfte das Büchlein auch neben Vorlesungen an anderen Universitätsanstalten sowie zum Selbstunterricht brauchbar sein, für Studierende der Mathematik im engeren Sinne natürlich nur zur Einführung oder zur Wiederholung der Elemente. Besonders beachtet ist (gemäß der Entstehung des Büchleins) die Beziehung zur Kinematik ebener zwangsläufiger Mechanismen. Die beim Schubkurbelmechanismus, beim Gelenkviereck usw. auftretenden Kurven, auch die zyklischen Kurven sind nach ihrer geometrischen Seite hin betrachtet. Der Leser wird beim Studieren gut tun, sich selbst einfache Modelle herzustellen und zum Zeichnen und Untersuchen der Kurven zu benutzen. Auch bei der Betrachtung der Flächen zweiten Grades wolle der Leser mit der Selbstanfertigung von Kartonmodellen und Fadenmodellen das Studium des Buches begleiten.

Weiter sind zunächst in Aussicht genommen:

Dietz, W., Prof. a. d. Techn. Hochschule München, Brückenbau. (2 Bde.)

Escher, R., Prof. a. d. Techn. Hochschule Zürich, Mechanische Technologie.

Rothe, Dr. R., Prof. a. d. Techn. Hochsch. Charlottenburg, Höh. Mathem. (2 Bde.)

UB Braunschweig

84



10084-052-6

TEUBNERS LEITFÄDEN
FÜR DEN MATHEMATISCHEN UND TECHNISCHEN
HOCHSCHULUNTERRICHT

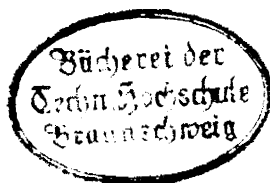
ANALYTISCHE GEOMETRIE

VON

DR. ROBERT FRICKE

PROFESSOR AN DER HERZOGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN BRAUNSCHWEIG

MIT 96 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B.G. TEUBNER

1915

SCHUTZFORMEL FÜR DIE VEREINIGTEN STAATEN VON AMERIKA:
COPYRIGHT 1915 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

VORWORT

Der Inhalt des vorliegenden Büchleins entspricht ungefähr dem, was innerhalb der gesamten Vorlesungen über höhere Mathematik an der hiesigen Technischen Hochschule aus dem Gebiete der analytischen Geometrie behandelt wird. Das Buch mag demnach als Vorlesungsleitfaden oder auch für Wiederholungen gute Dienste tun, wobei es keinen wesentlichen Unterschied ausmachen möchte, ob die analytische Geometrie innerhalb einer Gesamtvorlesung über „Höhere Mathematik“ oder gesondert zum Vortrag gelangt. Ich habe indessen versucht, die Darstellung nicht gar zu knapp zu wählen, habe dieselbe auch reichlicher mit Figuren ausgestattet, als es wohl sonst bei einem Leitfaden zu geschehen pflegt. Vielleicht ist das Buch auf diese Weise auch zur selbständigen Einführung in die Elemente der analytischen Geometrie geeignet und ist in diesem Sinne übrigens auch keineswegs allein auf den Bereich der technischen Hochschulen berechnet. Besonderes Gewicht ist auf die rein geometrische Behandlung einfacher Mechanismen gelegt, in welche hier insoweit eingeführt wird, daß sich die weitere dynamische Behandlung innerhalb der Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung unmittelbar anschließen kann. Im Kapitel über die Flächen zweiten Grades sind außer den allerersten gestaltlichen Betrachtungen nur solche Ausführungen gegeben, welche den Leser zur selbständigen Herstellung von Flächenmodellen anregen sollen.

Für die sorgfältige Durchsicht der Korrekturbogen bin ich Fräulein stud.math. von Goetze und Herrn cand.math. Raymann hier zu herzlichem Danke verpflichtet.

Braunschweig, im Februar 1915.

ROBERT FRICKE.

INHALTSVERZEICHNIS

I. Teil.

Analytische Geometrie der Ebene.

Kap. I. Die Koordinaten in der Ebene und die Darstellung der ebenen Kurven durch Gleichungen. Seite

§ 1. Die Kartesischen Koordinatensysteme in der Ebene	1
§ 2. Das Polarkoordinatensystem in der Ebene	3
§ 3. Transformation kartesischer Koordinaten	5
§ 4. Ausdruck der Entfernung zweier Punkte in rechtwinkligen Koordinaten	7
§ 5. Teilung und Verlängerung einer Strecke nach gegebenem Verhältnis	7
§ 6. Darstellung ebener Kurven durch Gleichungen	10
§ 7. Einteilung der Kurven nach der Art ihrer Gleichungen in kartesischen Koordinaten	12

Kap. II. Die Geraden und die Kreise.

§ 8. Darstellung der Geraden in kartesischen Koordinaten	12
§ 9. Die Normalgleichungen der Geraden	14
§ 10. Abstand eines Punktes von einer Geraden	17
§ 11. Winkel zwischen zwei Geraden	17
§ 12. Ausdruck des Dreiecksinhalts in den Eckenkoordinaten	18
§ 13. Bedingung für drei durch einen Punkt laufende Gerade	19
§ 14. Gleichung des Kreises in rechtwinkligen Koordinaten	22
§ 15. Darstellung der Kreistangenten	23
§ 16. Pol und Polare in bezug auf einen Kreis.	23
§ 17. Inversion an einem Kreise.	25
§ 18. Potenz, Potenzlinie und Potenzpunkt bei Kreisen	26
§ 19. Konjugierte Kreisscharen	28

Kap. III. Die Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln.

§ 20. Erklärung und Zeichnung der Ellipse, Hyperbel und Parabel	31
§ 21. Besondere Gleichungen für Ellipse, Hyperbel und Parabel	33
§ 22. Die Asymptoten der Hyperbel und die konjugierte Hyperbel	36
§ 23. Zwei Regeln zur Zeichnung der Ellipse	37
§ 24. Abschnittssatz der Hyperbel	39
§ 25. Sekanten und Tangenten der Kegelschnitte.	41
§ 26. Tangentenkonstruktionen bei den Kegelschnitten	42
§ 27. Die Asymptoten der Hyperbel als Koordinatenachsen	44
§ 28. Konjugierte Durchmesser der Ellipse.	45
§ 29. Zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse als Koordinatenachsen.	48
§ 30. Konjugierte Durchmesser der Hyperbeln	49

§ 31. Supplementäre Sehnen der Ellipse und der Hyperbel . . .	52
§ 32. Durchmesser und konjugierte Tangenten bei der Parabel .	53
§ 33. Brennpunkteigenschaften der Ellipse	55
§ 34. Brennpunkteigenschaften der Hyperbel	57
§ 35. Brennpunkteigenschaften der Parabel.	59

Kap. IV. Gemeinsame Gleichungen für die Kurven zweiten Grades.

§ 36. Die Scheitelgleichung der Kegelschnitte	60
§ 37. Brennpunkte und Leitgerade der Kegelschnitte.	62
§ 38. Die Polargleichung der Kegelschnitte	64
§ 39. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades und ihr Verhalten bei Koordinatentransformationen	65
§ 40. Die Kurven zweiten Grades mit nicht-verschwindender Invariante	67
§ 41. Die Kurven zweiten Grades mit verschwindender Invariante	70

Kap. V. Einige bei einfachen Mechanismen auftretende Kurven.

§ 42. Begriff der Gleitkurven und Beispiel der Ellipsen	72
§ 43. Gleitkurven vierten Grades beim Schubkurbelmechanismus	73
§ 44. Gleitkurven sechsten Grades beim Kurbelmechanismus . .	76
§ 45. Inversoren und Geradföhrungen	81
§ 46. Begriff der Rollkurven nebst Beispielen	83
§ 47. Beispiele zyklischer Kurven	85

II. Teil.

Analytische Geometrie des Raumes.

Kap. VI. Die Koordinaten im Raume und die Darstellung der Flächen und Kurven durch Gleichungen.

§ 48. Die Kartesischen Koordinatensysteme im Raume	90
§ 49. Parallelverschiebung der Koordinatenachsen	92
§ 50. Ausdruck der Entfernung zweier Punkte in rechtwinkligen Koordinaten.	93
§ 51. Radiusvektor und Richtungswinkel im rechtwinkligen System	93
§ 52. Ausdruck für den Richtungsunterschied zweier Geraden. .	94
§ 53. Teilung und Verlängerung einer Strecke nach gegebenem Verhältnis	96
§ 54. Transformation kartesischer Koordinaten.	97
§ 55. Darstellung von Flächen durch Gleichungen	100
§ 56. Beispiel der Zylinder- und Kegelflächen zweiten Grades. .	101
§ 57. Darstellung der Raumkurven durch Gleichungen. Beispiel der Schraubenlinie.	104

Kap. VII. Die Ebenen, die Geraden und die Kugeln.

§ 58. Darstellung der Ebenen in kartesischen Koordinaten . . .	106
§ 59. Die Normalgleichungen der Ebene	107
§ 60. Abstand eines Punktes von einer Ebene	108
§ 61. Neigungswinkel zwischen zwei Ebenen	109
§ 62. Dreiecks- und Tetraederinhalt	110
§ 63. Darstellung der Geraden in kartesischen Koordinaten. . .	111
§ 64. Die Normalgleichungen der Geraden	112
§ 65. Abstand eines Punktes von einer Geraden	114
§ 66. Kürzester Abstand zweier nicht-parallelen Geraden . . .	115
§ 67. Gleichung der Kugel in rechtwinkligen Koordinaten . . .	116

	Seite
§ 68. Darstellung der Tangentialebene der Kugel	117
§ 69. Pol, Polarebene und reziproke Polaren in bezug auf eine Kugel.	118
§ 70. Inversion an einer Kugel.	120
Kap. VIII. Die Ellipsoide, die Hyperboloide und die Paraboloide.	
§ 71. Das dreiachsige Ellipsoid	121
§ 72. Das zweischalige Hyperboloid	122
§ 73. Das elliptische Paraboloid	123
§ 74. Das einschalige Hyperboloid	125
§ 75. Das hyperbolische Paraboloid.	126
§ 76. Kreisschnitte und Kreisscheibenmodelle der Flächen zweiten Grades.	127
§ 77. Gerade Linien auf Flächen zweiten Grades und Fadenmodelle der Flächen	131

I. Teil.

Analytische Geometrie der Ebene.

Kap. I. Die Koordinaten in der Ebene und die Darstellung der ebenen Kurven durch Gleichungen.

§ 1. Die Kartesischen Koordinatensysteme in der Ebene.

Die in Fig. 1 dargestellte Gerade denke man beiderseits unendlich lang und versehe sie, wie die Figur andeutet, mit einer Pfeilrichtung. Für Längenmessungen auf der Geraden vom Punkte O aus führe man eine beliebige Längeneinheit ε ein. Ein Punkt P der Geraden, der von O aus gesehen in der Pfeilrichtung liegt, habe in der Einheit ε gemessen die Entfernung $OP = x$ von O (Fig. 1); die positive Zahl x heißt

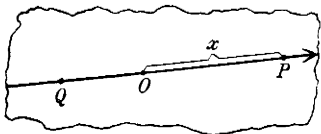


Fig. 1.

dann die „Abszisse“ des Punktes P . Ein Punkt Q , welcher von O aus gesehen auf der der Pfeilrichtung entgegengesetzten Seite der Geraden liegt, möge die negative Zahl $x = -OQ$ als Abszisse bekommen, wobei OQ die in ε gemessene Entfernung des Punktes Q von O ist. Der Punkt O selbst bekommt die Abszisse 0 und heißt dieserhalb „Nullpunkt“. *Jedem (endlichen) Punkte der Geraden kommt eine bestimmte Abszisse x zu, und jeder endliche (positive, negative oder verschwindende) Wert x liefert umgekehrt einen bestimmten Punkt der Geraden.* Die Beantwortung der Frage, ob es einen Sinn haben kann, x unendlich werden zu lassen, bleibt vorbehalten.

Unter irgendeinem Winkel α , der (in Graden als Maßeinheit benannt) $> 0^\circ$ und $< 180^\circ$ oder (in Bogenmaß gemessen) > 0 und $< \pi$ ist, werde die betrachtete Gerade von einer zweiten beiderseits unbegrenzten Geraden gekreuzt, der wir die in Fig. 2 ange deutete Pfeilrichtung erteilen. Auf dieser Geraden legen wir für die Längenmessungen von O aus eine beliebige Längeneinheit ε' zugrunde. Ein Punkt R der Geraden, der von O aus gesehen in

der Richtung der Pfeilspitze liegt, habe von O die in ε' gemessene Entfernung $OR = y$; diese positive Zahl y heißt dann die „*Ordinate*“ von R . Die Punkte R' der Geraden auf der anderen Seite von O bekommen negative Ordinate $y = -OR'$, wo OR' die wieder in ε' gemessene Entfernung von O bis R' ist; O selbst hat natürlich die Ordinate 0.

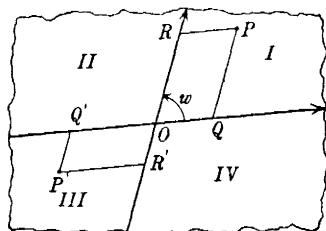


Fig. 2.

Durch beide Geraden wird eine Ebene festgelegt, in welcher P ein beliebiger Punkt in „endlicher“ Entfernung von O sei. Man ziehe durch P Parallele zur zweiten und ersten Geraden, bis man diese Geraden in den Punkten Q und R erreicht, und erteile dem Punkte P die Abszisse x von Q gleichfalls als „Abszisse“, die Ordinate y von R aber als „Ordinate“. Zusammenfassend nennt man die dem Punkte P zugeordneten Zahlen x, y die „*Koordinaten*“ von P , spricht auch einzeln von der „*x-Koordinate*“ und „*y-Koordinate*“.

Jeder endliche Punkt P der Ebene bekommt ein bestimmtes Koordinatenpaar x, y und wird demnach auch als der Punkt (x, y) bezeichnet; umgekehrt entspricht jedem endlichen Wertepaare x, y ein bestimmter Punkt P . Deutung und Gebrauch unendlich großer Werte der Koordinaten bleibt vorbehalten.

Die beiden sich in O schneidenden Geraden heißen „*Achsen des Koordinatensystems*“ und werden als „*x-Achse*“ oder „*Abszissenachse*“ und „*y-Achse*“ oder „*Ordinatenachse*“ unterschieden. Die Benennung „*Koordinatensystem*“ können wir auf die „*Zusammenstellung*“ der Koordinaten x, y für den einzelnen Punkt P oder auch auf die Darstellung aller endlichen Punkte der Ebene durch das „*System*“ aller endlichen Wertepaare x, y beziehen. Der durch den Nullpunkt O abgetrennte Teil der einzelnen Achse, welcher die Pfeilspitze trägt, heißt die „*positive Achse*“, der andere Teil die „*negative Achse*“. Wir halten an der (in Fig. 2 vorliegenden) Anordnung fest, daß die positive x -Achse vermöge einer Drehung durch den Winkel w , den „*Achsenwinkel*“, entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers in die positive y -Achse übergeht. Zuzufolge Fig. 2 kann man übrigens die Abszisse x des Punktes P auch durch die in der Einheit ε gemessene Länge \overline{PR} erklären, die Ordinate entsprechend durch die in ε' gemessene Länge \overline{PQ} , wobei natürlich die Maßzahl jedesmal mit dem richtigen Vorzeichen zu versehen ist.

Durch die Achsen wird die ganze Ebene in vier Teile zerlegt, die in Fig. 2 mit I, II, III und IV bezeichnet sind. Die Innen

punkte des Teiles I haben positive Koordinaten, diejenigen des Teiles II haben $x < 0$, $y > 0$ usw.

Nach ihrem Erfinder *Cartesius* heißen die erklärten Koordinaten x , y der Punkte P der Ebene „*Kartesische Koordinaten*“.

Ist der Achsenwinkel w insbesondere ein rechter, so spricht man von „*rechtwinkligen Koordinaten*“; liegt dieser Fall nicht vor, so bezeichnet man das Koordinatensystem als ein „*schiefwinkliges*“.

Vornehmlich werden wir mit rechtwinkligen Koordinaten arbeiten. Für manche Zwecke ist es vorteilhaft, die beiden mit ε und ε' bezeichneten Längeneinheiten verschieden zu wählen; doch sollen dieselben weiterhin stets einander gleich sein, so daß nur mit einer einzigen Längeneinheit gearbeitet wird. Wählt man etwa ein Zentimeter als Längeneinheit, so ist für zeichnerische Zwecke

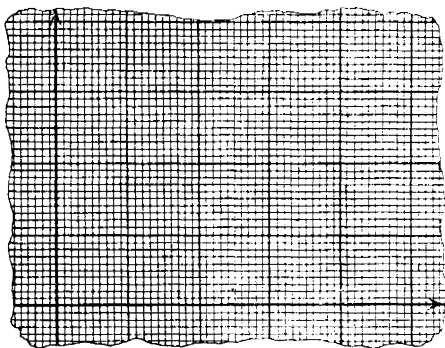


Fig. 3.

das im Handel erhältliche „*Millimeterpapier*“ oder „*Koordinatenpapier*“ (Fig. 3) sehr brauchbar, da man vermöge der Einteilung der Ebene in Quadratmillimeter die Koordinaten der einzelnen Punkte ziemlich sicher auf Zehntel-Millimeter abschätzen kann.

§ 2. Das Polarkoordinatensystem in der Ebene.

In der Ebene sei ein beliebiger Punkt O und eine von ihm ausgehende Gerade OA gewählt (Fig. 4). Einen beliebigen von O verschiedenen endlichen Punkt P

der Ebene kann man eindeutig festlegen durch Angabe der Entfernung $OP = r$ des Punktes P von O und des Winkels $\sphericalangle AOP = \vartheta$ zwischen OA und OP . Man nennt r und ϑ „*Polarkoordinaten*“ von P und bezeichnet einzeln r als „*Radiusvektor*“ und ϑ als „*Amplitude*“. Dem erklärten „*Polarkoordinatensystem*“ liegt O als „*Pol*“ und die Gerade OA

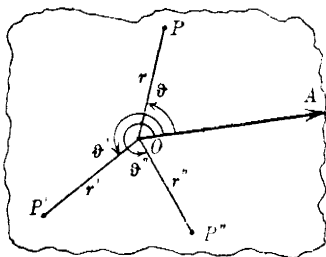


Fig. 4.

als „*Achse*“ zugrunde. Die Maßzahlen der Winkel ϑ , die wir gewöhnlich in Graden gemessen denken, sollen bei Drehung des

Radiusvektors *entgegen* dem Drehsinn des Uhrzeigers wachsen. Der Punkt P der Polarkoordinaten r, ϑ wird auch kurz als Punkt (r, ϑ) benannt.

Ein von O verschiedener Punkt der Achse $OA^1)$ hat die Amplitude 0 . Man gewinnt bereits alle von O in der Ebene ausstrahlende Richtungen, und jede nur einmal, wenn man den Winkel ϑ auf das Intervall $0^\circ \leq \vartheta < 360^\circ$ beschränkt. Der Pol O selbst ist durch $r = 0$ eindeutig bestimmt; jeder von O verschiedene endliche Punkt P der Ebene bekommt als Koordinatenpaar zwei Zahlen r, ϑ , die den Ungleichungen:

$$r > 0, \quad 0^\circ \leq \vartheta < 360^\circ$$

genügen (s. die Punkte P, P', P'' in Fig. 4), und jedes solche Zahlenpaar r, ϑ liefert eindeutig einen Punkt P .

Kommen bei Rechnungen Winkel ϑ außerhalb jenes Intervalls vor, so mag man sie durch Zusatz oder Abzug eines Multiplums von 360° auf Winkel des Intervalls reduzieren. Etwa bei Rechnungen auftretende negative Werte von r sind auf eine mögliche Deutung stets besonders zu untersuchen. Die Zulassung des Wertes $r = \infty$ bleibt vorbehalten. Für zeichnerische Zwecke eignet sich das gleichfalls im Handel erhältliche „Polarkoordinatenpapier“, dessen Einrichtung aus Fig. 5 ersichtlich ist.

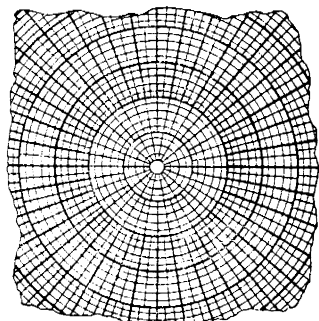


Fig. 5.

Führt man neben den Polarkoordinaten noch ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem ein mit dem Pol O als „Nullpunkt“ und der Achse OA als „positiver x -Achse“, so bestehen zwischen den Polarkoordinaten r, ϑ und den rechtwinkligen Koordinaten x, y eines und desselben Punktes P die Beziehungen:

$$(1) \quad \begin{cases} x = r \cos \vartheta, \\ y = r \sin \vartheta, \end{cases}$$

die man an den beiden Punkten P und P' der Fig. 6 leicht beweisen wird. Umgekehrt drücken

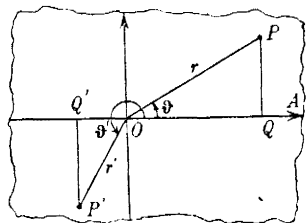


Fig. 6.

1) Man denke dieselbe in Richtung der Pfeilspitze in Fig. 4 unbegrenzt.

sich die Polarkoordinaten r, ϑ eines Punktes P in dessen rechtwinkligen Koordinaten x, y auf Grund der Gleichungen aus:

$$(2) \quad r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \vartheta = \frac{x}{+\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2}},$$

wobei für den Nullpunkt O die beiden letzten Gleichungen in Fortfall kommen.

§ 3. Transformation kartesischer Koordinaten.

Es soll festgestellt werden, wie sich die kartesischen Koordinaten eines Punktes umformen oder „transformieren“, wenn man einen Wechsel des Achsenpaares vornimmt. Wir betrachten folgende Spezialfälle:

I. Der neue Nullpunkt O' habe die Koordinaten a, b im alten System (Fig. 7), die neuen Achsen seien den alten parallel und gleichgerichtet; man spricht von einer „*Parallelverschiebung*“ oder „*Translation*“ der alten Achsen in die neue Lage.

In Fig. 7 sind die neuen Achsen stark markiert, und die Strecken OS und $O'S$ haben die Längen a und $-b$; im Falle der Fig. 7 hat nämlich b einen negativen Wert. Die alten Koordinaten x, y eines Punktes P stellen sich in den neuen x', y' des gleichen Punktes in der Gestalt:

$$(1) \quad x = x' + a, \quad y = y' + b$$

dar; für den Punkt P der Fig. 7 liest man diese Regel sofort aus der Figur ab, sie gilt unverändert für alle endlichen Punkte P , sowie übrigens auch für alle Lagen des neuen Nullpunktes O' , wie man in einigen Fällen prüfen wolle.

II. Die neuen Achsen seien rechtwinklig, beide Systeme haben den Nullpunkt, die x -Achse und deren Richtung gemein (s. Fig. 8, wo die neuen Achsen wieder stark markiert sind).

Ist w der Achsenwinkel im alten System, so stellen sich die neuen Koordinaten x', y' eines Punktes P in den alten x, y so dar:

$$(2) \quad x' = x + y \cos w, \quad y' = y \sin w,$$

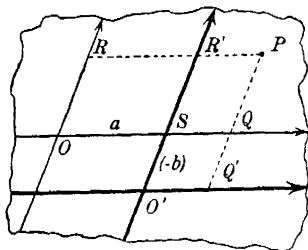


Fig. 7.

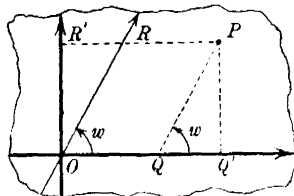


Fig. 8.

woraus man durch Auflösung nach x und y findet:

$$(3) \quad x = x' - y' \cotg w, \quad y = \frac{y'}{\sin w}.$$

Für den Punkt P der Fig. 8 liest man die Gleichungen (2) aus der Figur leicht ab; sie gelten in derselben Gestalt für alle endlichen Punkte P sowie übrigens auch für stumpfe Winkel w , wie man wieder in einigen Fällen prüfen wolle.

III. Beide Systeme sind rechtwinklig und haben den Nullpunkt gemein, so daß die alten Achsen in die neuen mittels einer „Drehung“ oder „Rotation“ um O durch den Winkel α übergehen; der Drehungswinkel α ist irgendeiner im Intervall $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$.

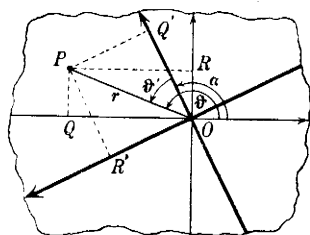


Fig. 9.

In Fig. 9 sind die neuen Achsen wieder stark markiert und die Koordinaten x, y des Punktes P im alten System sowie x', y' im neuen System durch die punktierten Linien angedeutet. Man ordne jedem System ein Polarkoordinatensystem zu, indem man O als Pol und je die positive Abszissenachse zur Achse wählt. In dem zum alten System gehörenden Polarkoordinatensystem sei P der Punkt (r, ϑ) , im anderen (r', ϑ') ; dann gilt (Fig. 9):

$$r' = r, \quad \vartheta' = \vartheta - \alpha^1).$$

Hieraus folgt auf Grund von (1) S. 4:

$$x' = r' \cos \vartheta' = r \cos (\vartheta - \alpha) = + r \cos \vartheta \cdot \cos \alpha + r \sin \vartheta \cdot \sin \alpha,$$

$$y' = r' \sin \vartheta' = r \sin (\vartheta - \alpha) = - r \cos \vartheta \cdot \sin \alpha + r \sin \vartheta \cdot \cos \alpha,$$

und also, wenn man $r \cos \vartheta = x$ und $r \sin \vartheta = y$ setzt:

$$(4) \quad x' = + x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = - x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Durch Auflösung nach x und y findet man die Ausdrücke:

$$(5) \quad x = + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

der alten Koordinaten in den neuen. —

Der Übergang von irgendeinem Achsenpaar des Nullpunktes O zu irgendeinem anderen des Nullpunktes O' kann durch Zusammensetzung einiger Transformationen der vorbetrachteten besonderen Arten hergestellt werden. Man vollziehe nämlich erstlich eine Parallelverschiebung der alten Achsen nach dem neuen Null-

1) Ist $\vartheta < \alpha$, so hat man die zweite Gleichung zu ersetzen durch $\vartheta' = \vartheta - \alpha + 360^\circ$.

punkte O' ; hierauf gehe man von beiden Systemen zu zwei rechtwinkligen über, die mit ihnen den Nullpunkt O' , die x -Achsen und deren Richtungen gemein haben; das eine der beiden rechtwinkligen Achsenpaare geht dann einfach durch eine Drehung um O' in das andere über. Da in allen einzelnen Formelpaaren (1), (3), (5) die alten Koordinaten sich als Aggregate „ersten Grades“ in den neuen darstellen, so folgt auch bei der Zusammensetzung der Transformationen der Satz: *Jede Transformation kartesischer Koordinaten wieder auf kartesische begründet zwischen den beiderseitigen Koordinatenpaaren eine Beziehung „ersten“ Grades oder, wie man auch sagt, eine „lineare“ Beziehung der Gestalt:*

$$(6) \quad x = a_1 x' + a_2 y' + a, \quad y = b_1 x' + b_2 y' + b.$$

§ 4. Ausdruck der Entfernung zweier Punkte in rechtwinkligen Koordinaten.

Ein Punkt P der rechtwinkligen Koordinaten x, y hat zufolge (2) S. 5 vom Nullpunkte O die Entfernung:

$$(1) \quad \overline{OP} = + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Sind zwei Punkte P_1 und P_2 durch ihre rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben, so führe man eine Translation der Achsen nach P_2 als neuen Nullpunkt aus. Nach (1) S. 5 sind die neuen Koordinaten x', y' des Punktes P_1 :

$$x' = x_1 - x_2, \quad y' = y_1 - y_2.$$

Aus der eben angegebenen Gleichung (1) folgt somit: *Die Entfernung $P_1 P_2$ zweier durch ihre rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegebenen Punkte P_1, P_2 ist dargestellt durch:*

$$(2) \quad \overline{P_1 P_2} = + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

§ 5. Teilung und Verlängerung einer Strecke nach gegebenem Verhältnis.

Der Nullpunkt O und ein von O verschiedener Punkt P_1 der Koordinaten x_1, y_1 legen eine durch sie hindurchlaufende Gerade fest, welche durch O und P_1 in drei Abschnitte zerlegt wird, die endliche Strecke OP_1 und die beiden von O bzw. von P_1 ins Unendliche laufenden Abschnitte. Ist P irgendein von O verschiedener Punkt dieser Geraden, so sind, wie ein Blick auf Fig. 10 lehrt, die Koordinaten x, y von P zu x_1, y_1 proportional und können also mittels eines Proportionalitätsfaktors μ in der Gestalt:

$$(1) \quad x = \mu x_1, \quad y = \mu y_1$$

dargestellt werden. Umgekehrt ist, wenn μ irgendeinen endlichen

Wert bedeutet, der Punkt $(\mu x_1, \mu y_1)$ stets auf jener Geraden gelegen; insbesondere liefert $\mu = 0$ den Nullpunkt O , $\mu = 1$ den Punkt P_1 , und man erhält für $\mu < 0$

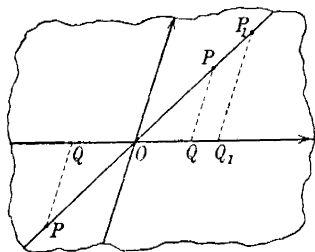


Fig. 10.

einen Innenpunkt des von O ins Unendliche laufenden Abschnitts, für $0 < \mu < 1$ einen Innenpunkt der Strecke OP_1 und endlich für $\mu > 1$ einen Innenpunkt der von P_1 ins Unendliche laufenden Strecke. In jedem Falle gilt die Proportion:

$$(2) \quad \overline{OP} : \overline{OP_1} = |\mu| : 1,$$

wenn $|\mu|$ den absoluten Wert von μ bedeutet.

Gehört P der Strecke OP_1 an, ist also $0 \leq \mu \leq 1$, so wird diese Strecke durch den Punkt P nach dem Verhältnis:

$$\overline{OP} : \overline{P_1P} = \mu : (1 - \mu)$$

geteilt. Schreiben wir für dies Verhältnis zwei beliebige, nicht-negative und nicht zugleich verschwindende Verhältniszahlen m_1, m_2 vor:

$$(3) \quad \overline{OP} : \overline{P_1P} = m_1 : m_2,$$

so berechnet sich der zugehörige Wert μ aus:

$$\frac{\mu}{1 - \mu} = \frac{m_1}{m_2} \quad \text{zu} \quad \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Der Punkt P , welcher die Strecke OP_1 nach dem Verhältnis (3) teilt, hat also die Koordinaten:

$$(4) \quad x = \frac{m_1 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1}{m_1 + m_2}.$$

Ist P nicht Innenpunkt der Strecke OP_1 , ist also entweder $\mu \geq 1$ oder $\mu \leq 0$, so sagt man, P verlängere die Strecke OP_1 nach dem Verhältnis:

$$\overline{OP} : \overline{P_1P} = \mu : (\mu - 1) \quad \text{oder} \quad \overline{OP} : \overline{P_1P} = (-\mu) : (-\mu + 1),$$

je nachdem $\mu \geq 1$ oder $\mu \leq 0$ zutrifft. Schreibt man für dies Verhältnis zwei voneinander verschiedene, nicht-negative und nicht zugleich verschwindende Verhältniszahlen m_1, m_2 vor:

$$(5) \quad \overline{OP} : \overline{P_1P} = m_1 : m_2,$$

so liegt der erste oder zweite der eben unterschiedenen Fälle vor, je nachdem $m_1 > m_2$ oder $m_1 < m_2$ zutrifft; entsprechend liegt P

auf dem von P_1 bzw. auf dem von O ins Unendliche ziehenden Abschnitte unserer Geraden. In beiden Fällen gilt:

$$\frac{\mu}{\mu - 1} = \frac{m_1}{m_2} \quad \text{und also} \quad \mu = \frac{m_1}{m_1 - m_2}.$$

Der Punkt P , welcher die Strecke OP_1 nach dem Verhältniss (5) verlängert, hat also die Koordinaten:

$$(6) \quad x = \frac{m_1 x_1}{m_1 - m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1}{m_1 - m_2}.$$

Soll eine beliebige endliche und nicht-verschwindende Strecke $P_1 P_2$, die durch die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 ihrer Endpunkte P_1, P_2 gegeben ist, durch den Punkt P der Koordinaten x, y nach dem Verhältniss:

$$(7) \quad \overline{P_2 P} : \overline{P_1 P} = m_1 : m_2$$

geteilt oder verlängert werden, so führe man, um die Regeln (4) und (6) anwenden zu können, eine Parallelverschiebung der Achsen auf P_2 als neuen Nullpunkt aus. Im neuen Koordinatensysteme hat P_1 die Koordinaten $x_1 - x_2, y_1 - y_2$, der Punkt P aber $x - x_2, y - y_2$, so daß aus (4) und (6):

$$x - x_2 = \frac{m_1 (x_1 - x_2)}{m_1 \pm m_2}, \quad y - y_2 = \frac{m_1 (y_1 - y_2)}{m_1 \pm m_2}$$

folgt. Durch Auflösung nach x und y ergibt sich: Der Punkt P , welcher die Strecke $\overline{P_1 P_2}$ nach dem Verhältniss (7) teilt bzw. verlängert, hat die Koordinaten:

$$(8) \quad x = \frac{m_1 x_1 \pm m_2 x_2}{m_1 \pm m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 \pm m_2 y_2}{m_1 \pm m_2},$$

wobei die oberen Zeichen die Teilung, die unteren aber die Verlängerung liefern.

Bei der Teilung findet man in dem besonderen Falle $m_1 = m_2$: Der Mittelpunkt der Strecke $P_1 P_2$ hat die arithmetischen Mittel der Koordinaten der Endpunkte zu Koordinaten:

$$(9) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Würde man im Falle der Verlängerung $m_1 = m_2$ setzen, so würde, da die beiden Gleichungen $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ nicht zugleich zutreffen können, mindestens einer der beiden durch (8) gelieferten Werte x, y nicht mehr endlich sein, so daß dem Verlängerungsverhältniss 1 kein endlicher Punkt der Geraden entspricht. Um jedoch auch dieses Verhältniss 1 mit einer geometrischen Sprechweise zu versehen, sagt man, es liefere „den unendlich fernen Punkt“ der Geraden. Dieser Punkt hat dann, insofern sich das Verhältniss 1

stetig sowohl an die Verhältnisse unter 1 als an die über 1 anschließt, als *gemeinsamer Endpunkt* der beiden von P_2 und von P_1 ins Unendliche laufenden Abschnitte unserer Geraden zu gelten.

§ 6. Darstellung ebener Kurven durch Gleichungen.

Ist zwischen den Koordinaten x, y die Gleichung $y = 2x - 3$ vorgeschrieben, so berechnet sich aus derselben für jedes x ein bestimmter Wert y , der mit jenem x einen Punkt (x, y) festlegt. Markiert man alle diese Punkte, so bilden dieselben eine zusam-

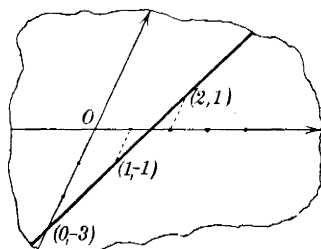


Fig. 11.

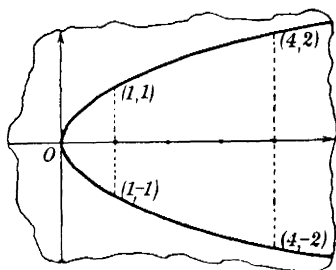


Fig. 12.

menhängende Punktreihe oder Linie (und zwar eine „Gerade“), wie Fig. 11 erläutert. Gilt die Gleichung $y^2 - x = 0$ und also $y = \pm \sqrt{x}$, so hat man für jede positive Abszisse x zwei einander entgegengesetzte Werte y , für $x = 0$ den einen Wert $y = 0$ und für negative x keine (reellen) Werte y . Die Punkte (x, y) , deren Koordinaten die vorgeschriebene Gleichung befriedigen, setzen die in Fig. 12 dargestellte Kurve („Parabel“) zusammen. Ist für die Polarkoordinaten r, ϑ die Gleichung:

$$r = \frac{5}{3 + 2 \cos \vartheta}$$

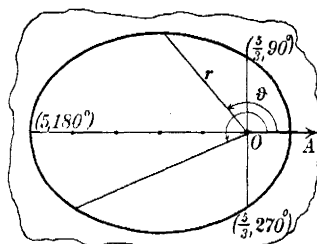


Fig. 13.

vorgeschrieben, so entspricht jeder Amplitude ϑ eindeutig ein bestimmter positiver Wert r , der mit ϑ einen Punkt (r, ϑ) der Ebene festlegt. Alle in solcher Weise der vorgeschriebenen Gleichung entsprechenden Punkte bilden eine

den Pol O umgebende oval geformte Kurve („Ellipse“), welche in Fig. 13 dargestellt ist.

In dieser Art ordnen wir unter Vorbehalt genauerer Untersuchung allgemein einer Gleichung zwischen kartesischen Koordinaten oder zwischen Polarkoordinaten eine „Kurve“ zu, bestehend

aus allen Punkten der Ebene, deren Koordinatenpaare die vorgeschriebene Gleichung befriedigen.

Ist eine Kurve gegeben, so versuche man umgekehrt eine Gleichung zwischen den Koordinaten eines geeignet gewählten Systems aufzustellen, die von sich aus in vorstehender Weise zur Kurve hinführen würde. Z. B. ist in Fig. 14 in einem Kreise vom Radius 1 ein Durchmesser OA und im Endpunkte A die Tangente gezeichnet. Auf der Geraden von O nach einem Punkte B der Tangente sei \overline{BC} die durch den Schnittpunkt C mit dem Kreise abgeschnittene äußere Strecke. Man trage auf dieser Geraden von O eine mit jenem äußeren Abschnitte gleiche Strecke $\overline{OP} = \overline{BC}$ ab. Der geometrische Ort aller so gewinnbaren Punkte P (man sehe noch die Punkte P' und P'' der Figur als Beispiele) ist die in Fig. 14 gezeichnete Kurve („Zissoide“). Wählt man O als Pol und OA als Achse eines Polarkoordinatensystems, so gilt, wenn ϑ die Amplitude des Punktes B ist:

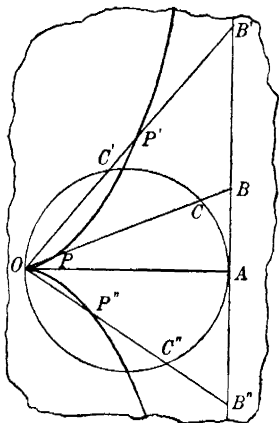


Fig. 14.

$$\overline{OB} = \frac{2}{\cos \vartheta}, \quad \overline{OC} = 2 \cos \vartheta, \quad \overline{BC} = \frac{2}{\cos \vartheta} - 2 \cos \vartheta;$$

also ist, wenn r, ϑ die Koordinaten von P sind:

$$r = \overline{OP} = \frac{2}{\cos \vartheta} - 2 \cos \vartheta = \frac{2 \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}.$$

Da umgekehrt keine anderen Punkte (r, ϑ) als diejenigen der fraglichen Kurve die vorstehende Gleichung befriedigen, so ist:

$$r \cos \vartheta - 2 \sin^2 \vartheta = 0$$

die Gleichung der Kurve in dem gewählten Polarkoordinatensystem. Nimmt man O als Nullpunkt und OA als positive x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so rechnet sich auf Grund von (2) § 2 die vorstehende Gleichung auf:

$$(1) \quad x^3 + xy^2 - 2y^2 = 0$$

um. Diese Gleichung würde von sich aus zur Kurve der Fig. 14 hinführen.

In dieser Art denken wir jetzt allgemein einer vorgelegten Kurve eine Gleichung zwischen Koordinaten eines zweckmäßig gewählten

Systems zugeordnet, die dann eben von sich aus in der anfangs besprochenen Art wieder zur Kurve hinführen muß. Man nennt diese Gleichung den „*analytischen Ausdruck*“ oder kurz „*die Gleichung*“ der Kurve. Die Methode der „*analytischen*“ Geometrie besteht darin, daß man die geometrischen Eigenschaften der Kurven durch Rechnungen („*analytische*“ Entwicklungen), angewandt auf ihre Gleichungen, erforscht.

§ 7. Einteilung der Kurven nach der Art ihrer Gleichungen in kartesischen Koordinaten.

Entsteht die Gleichung einer Kurve in *kartesischen Koordinaten* durch Nullsetzen eines Aggregates, dessen einzelne Glieder neben konstanten Koeffizienten nur Potenzen von x und y mit ganzzahligen, nicht-negativen Exponenten enthalten, oder ist die Gleichung durch Umrechnung auf diese Gestalt reduzierbar, so heißt die Kurve eine „*algebraische*“. Die Summe der Exponenten von x und y im einzelnen Gliede heißt der „*Grad*“ des Gliedes; der höchste im Aggregat auftretende Grad heißt der „*Grad der Gleichung*“. Man teilt die algebraischen Kurven nach dem Grade ihrer Gleichungen in „*Kurven ersten, zweiten usw. Grades*“ ein; z. B. ist die in Fig. 14 dargestellte Kurve zufolge ihrer Gleichung (1) § 6 vom dritten Grade.

Sollen diese Erklärungen Bedeutung haben, so müssen sie von der Auswahl des Koordinatensystems unabhängig sein: *In der Tat bleibt eine algebraische Kurve n^{ten} Grades eine solche, falls man durch Transformation zu einem anderen kartesischen Koordinatensystem übergeht.* Es liefert nämlich jede solche Transformation Ausdrücke der Gestalt (6) S. 7 für die alten Koordinaten x, y in den neuen x', y' . Ein Glied $ax^\mu y^\nu$ des Grades $(\mu + \nu)$ liefert, auf die x', y' umgerechnet, ein Aggregat, das den Grad $(\mu + \nu)$ nicht übersteigt. Die Kurve bleibt also bei Gebrauch der x', y' algebraisch, und ihr Grad ist nicht $> n$; er kann aber auch nicht $< n$ sein, da man sonst bei der umgekehrten Transformation in den ursprünglichen x, y zu einer Gleichung mit einem Grade $< n$ zurückgeführt würde.

Alle nicht-algebraischen Kurven heißen „*transzendent*“ (das Gebiet der Algebra übersteigend), z. B. die Kurve, welche der Gleichung $y = {}^{10}\log x$ entspricht.

Kap. II. Die Geraden und die Kreise.

§ 8. Darstellung der Geraden in kartesischen Koordinaten.

Eine zur y -Achse parallele Gerade ist durch ihren Schnittpunkt $(d, 0)$ mit der x -Achse bestimmt. Alle Punkte der Geraden genügen der Gleichung:

$$(1) \quad x = d,$$

und jeder Punkt (x, y) , der diese Gleichung befriedigt, also jeder Punkt (d, y) liegt auf der Geraden, so daß wir in (1) die Gleichung der Geraden vor uns haben; die y -Achse selbst hat demnach die Gleichung $x = 0$.

Eine nicht zur y -Achse parallele Gerade ist durch ihren Schnittpunkt $(0, \nu)$ mit dieser Achse und ihren Winkel β gegen die x -Achse bestimmt; ist die Gerade zur x -Achse parallel, so ist $\beta = 0$ zu nehmen, andernfalls sei β der Winkel der nach oben¹⁾ gerichteten Geraden gegen die positive x -Achse (Fig. 15). Umgekehrt gehört zu beliebigem ν und irgendeinem dem Intervall $0^\circ \leq \beta < 180^\circ$ entnommenen, vom Achsenwinkel w verschiedenen Winkel β immer eine bestimmte, zur y -Achse nicht-parallele Gerade.²⁾

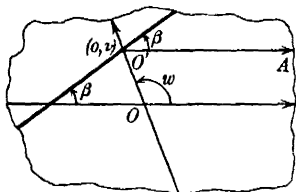


Fig. 15.

Sind r, ϑ Polarkoordinaten in bezug auf den Punkt $(0, \nu)$ als Pol O' und die zur positiven x -Achse parallele Achse $O'A$ (Fig. 15), so gilt für den Übergang von den Polarkoordinaten r, ϑ eines einzelnen Punktes zu dessen kartesischen Koordinaten x, y nach (1) § 2 und (1) und (2) § 3:

$$(2) \quad r \cos \vartheta = x + (y - \nu) \cos w, \quad r \sin \vartheta = (y - \nu) \sin w.$$

Die Gerade setzt sich nun zusammen aus dem Pole $r = 0$, allen Punkten mit $\vartheta = \beta$ und allen Punkten mit $\vartheta = \beta + 180^\circ$; d. h. sie besteht gerade genau aus allen Punkten, welche die Gleichung:

$$r \sin (\vartheta - \beta) = r \sin \vartheta \cdot \cos \beta - r \cos \vartheta \cdot \sin \beta = 0$$

befriedigen. Durch Eintragung der Ausdrücke (2) für $r \sin \vartheta$ und $r \cos \vartheta$ folgt:

$$(y - \nu) \sin w \cos \beta - x \sin \beta - (y - \nu) \cos w \sin \beta = 0,$$

oder besser geordnet:

$$(3) \quad y = \left(\frac{\sin \beta}{\sin (w - \beta)} \right) x + \nu$$

als Gleichung der Geraden im Koordinatensystem x, y .

Den Koeffizienten von x in der Gleichung (3) bezeichnen wir kurz durch:

$$(4) \quad \mu = \frac{\sin \beta}{\sin (w - \beta)} = \frac{1}{\sin w \cotg \beta - \cos w}$$

1) d. i. im Sinne wachsender Ordinaten y .

2) Der ausgeschlossene Fall $\beta = w$ führt zu den schon erledigten zur y -Achse parallelen Geraden.

und nennen ihn den „*Richtungskoeffizienten*“ der Gleichung:

$$(5) \quad y = \mu x + \nu.$$

Jeder von w verschiedene Winkel β liefert einen bestimmten endlichen Wert μ , und zu jedem endlichen Werte μ gehört zufolge (4) ein bestimmter, von w verschiedener Winkel β des Intervalls $0^\circ \leq \beta < 180^\circ$.

Unter Zusammenfassung von (1) und (5) folgt: Eine Gerade ist in kartesischen Koordinaten durch eine Gleichung ersten Grades darstellbar.

Ist umgekehrt irgendeine Gleichung ersten Grades:

$$(6) \quad ax + by = c$$

vorgelegt, so dürfen die Koeffizienten a und b nicht zugleich verschwinden, da die Gleichung sonst entweder für kein (endliches) Wertepaar x, y erfüllt ist (nämlich für $c \neq 0$) oder aber für alle Paare x, y (nämlich wenn $c = 0$ ist)¹⁾. Ist $b = 0$, so setze man $\frac{c}{a} = d$ und kommt zur Gleichung (1) zurück; ist $b \neq 0$, so setze man $\frac{a}{b} = -\mu$, $\frac{c}{b} = \nu$ und wird zur Gleichung (5) geführt: Jede Gleichung (6) mit nicht zugleich verschwindenden a, b stellt eine Gerade dar, so daß die gesamten Geraden der Ebene die algebraischen Kurven ersten Grades erschöpfen.

Als selbstverständlich notieren wir noch den Satz: Zwei Gleichungen ersten Grades, die sich nur um einen endlichen, nicht-verschwindenden Faktor unterscheiden, stellen ein und dieselbe Gerade dar und umgekehrt. Betreffs der Umkehrung wolle man nur beachten, daß die beiden dieselbe Gerade darstellenden Gleichungen bei den soeben an (6) angeknüpften Rechnungen zu ein und derselben Gleichung (1) bzw. (5) führen müssen.

§ 9. Die Normalgleichungen der Geraden.

Die Gleichung (6) nennen wir „allgemeine Gleichung“ der Geraden. Durch Zusatz geeigneter endlicher und nicht-verschwindender Faktoren entstehen die „Normalgleichungen“ der Geraden.

I. Erste Normalgleichung einer nicht zur y -Achse parallelen Geraden.

Als solche bezeichnen wir die im vorigen Paragraphen benutzte Gleichung (5), in der μ den Richtungskoeffizienten und ν die Ordinate des Schnittpunktes mit der y -Achse darstellt. Im Falle eines rechtwinkligen Systems ist zufolge (4) § 8 einfach:

$$(1) \quad \mu = \operatorname{tg} \beta.$$

1) Man kann auch sagen, daß der erste Grad gar nicht vorliegen würde, wenn a und b zugleich verschwinden.

II. Zweite Normalgleichung einer nicht durch O laufenden Geraden.

Für eine durch den Nullpunkt laufende Gerade ist $c = 0$, d. h. das Verschwinden des Absolutgliedes charakteristisch. Ist $c \neq 0$, so teile man die Gleichung durch c und schreibe $\frac{c}{a} = l$, $\frac{c}{b} = m$. Die Normalgleichung ist:

$$(2) \quad \frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 1.$$

Dabei bedeutet l die Abszisse des Schnittpunktes der Geraden mit der x -Achse, m die Ordinate des Schnittpunktes mit der y -Achse; l und m sind $\neq 0$, können aber (jedoch nicht zugleich) unendlich werden (Fall einer zu einer Achse parallelen Geraden).

III. Dritte Normalgleichung oder „Zweipunktform“ der Geradengleichung.

Durch zwei voneinander verschiedene Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) läuft eine einzige Gerade hindurch, deren Gleichung in der Gestalt:

$$(3) \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

geschrieben werden kann, falls keine der Differenzen $(x_2 - x_1)$ und $(y_2 - y_1)$ verschwindet; denn diese Gleichung ist in den variablen Koordinaten x, y vom ersten Grade und ist sowohl für $x = x_1, y = y_1$ als für $x = x_2, y = y_2$ erfüllt. Gleichung (3) gestaltet man leicht in die folgende „Zweipunktform“ der Geradengleichung um:

$$(4) \quad x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) - (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

Gleichung (4) bleibt auch bestehen, falls eine der Differenzen $(y_2 - y_1)$, $(x_1 - x_2)$ verschwindet; ist z. B. $x_2 = x_1$ und damit die Gerade zur y -Achse parallel, so nimmt die Gleichung (4) nach Division durch die jetzt von 0 verschiedene Zahl $(y_2 - y_1)$ die für jenen Fall charakteristische Gestalt $x - x_1 = 0$ an.

IV. Vierte Normalgleichung einer Geraden bei rechtwinkligen¹⁾ Koordinaten.

Polarkoordinaten r, ϑ beziehen wir auf O als Pol und die positive x -Achse als Achse. Läuft erstens die Gerade nicht durch O , so fälle man von O das Lot auf die Gerade, dessen Fußpunkt die Koordinaten $r = p, \vartheta = \alpha$ habe. Für einen Punkt der Geraden von den Koordinaten r, ϑ mit $\alpha < \vartheta < 360^\circ$ gilt (Fig. 16):

$$r \cos(\vartheta - \alpha) = r \cos \vartheta \cdot \cos \alpha + r \sin \vartheta \cdot \sin \alpha = p,$$

1) Diese besondere Voraussetzung dient der Vereinfachung der folgenden Formeln.

oder in rechtwinkligen Koordinaten geschrieben:

$$(5) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Da diese Gleichung *ersten* Grades auch für den Lotfußpunkt (p, α) der rechtwinkligen Koordinaten $x = p \cos \alpha$, $y = p \sin \alpha$ gilt und also für die *zwei* Punkte (r, ϑ) und (p, α) der Geraden rich-

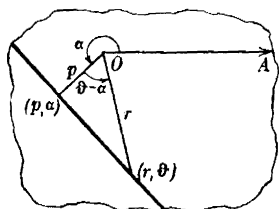


Fig. 16.

tig ist, so stellt sie die Gerade dar und sei unsere „vierte Normalgleichung“, in der also p die Länge des Lotes von O auf die Gerade ist und α die Amplitude dieses Lotes bedeutet.

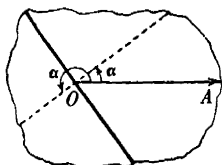


Fig. 17.

Die Gleichung

(5) bleibt im Falle einer durch O laufenden Geraden gültig; dann ist $p = 0$ und α einer der beiden Winkel, welche die in O auf der Geraden errichteten Lote (in Fig. 17 punktiert) zu Amplituden haben. Es ist nämlich in diesem Falle $r \cos(\vartheta - \alpha) = 0$ die Gleichung der Geraden in Polarkoordinaten (Fig. 17).

Um den Faktor σ zu bestimmen, der von der „allgemeinen“ Gleichung (6) S. 14 aus in:

$$\sigma a x + \sigma b y - \sigma c = 0$$

die Normalgleichung (5) liefert, setze man:

$$\sigma a = \cos \alpha, \quad \sigma b = \sin \alpha,$$

woraus man durch Quadrieren und Addieren:

$$(6) \quad \sigma^2(a^2 + b^2) = 1, \quad \sigma = \frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

findet. Für $c = 0$ ist das Vorzeichen in der zweiten Gleichung (6) *willkürlich wählbar* (s. die zwei um 180° verschiedenen Winkel α der Fig. 17). Für $c \neq 0$ sei $\text{sgn}(c)$, d. i. „signum“ von c , das Vorzeichen von c und also gleich $+1$ oder -1 , je nachdem $c > 0$ oder < 0 ist; dann ist:

$$(7) \quad \sigma = \frac{\text{sgn}(c)}{+\sqrt{a^2 + b^2}}$$

mit positiv genommener Wurzel zu setzen, damit die Lotlänge:

$$(8) \quad p = \sigma c = \frac{c \cdot \text{sgn}(c)}{+\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{+\sqrt{a^2 + b^2}}$$

einen positiven Zahlwert darstellt.

§ 10. Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Der Abstand eines Punktes von einer Geraden ist die Länge des Lotes vom Punkte auf die Gerade. Ist die Gerade in *rechtwinkligen* Koordinaten durch die „allgemeine“ Gleichung (6) S. 14 gegeben, so ist der Abstand p des Punktes O von der Geraden durch (8) § 9 gegeben.

Um den Abstand eines beliebigen Punktes (x_0, y_0) zu finden, führe man eine Translation der Achsen nach (x_0, y_0) als neuen Nullpunkt O' aus. Nach (1) § 3, S. 5, ist zu setzen $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, unter x', y' die neuen Koordinaten verstanden, so daß die Gerade im neuen System die Gleichung:

$$ax' + by' - (c - ax_0 - by_0) = 0$$

mit dem Absolutgliede $(c - ax_0 - by_0)$ hat. Der mit q zu bezeichnende Abstand des Punktes (x_0, y_0) , d. i. des neuen Nullpunktes, von der Geraden ist nach (8) § 9:

$$(1) \quad q = \frac{ax_0 + by_0 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

wird also gewonnen, indem man in die linke Seite der Geradengleichung $ax + by - c = 0$ die Koordinaten des Punktes (x_0, y_0) einträgt und den sich ergebenden Zahlwert, absolut genommen, durch $\sqrt{a^2 + b^2}$ teilt. Die Gleichung (8) § 9 ist hierin als Spezialfall enthalten.

§ 11. Winkel zwischen zwei Geraden.

Es seien zwei Gerade bei Gebrauch *rechtwinkliger* Koordinaten durch die Gleichungen:

$$(1) \quad a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2$$

gegeben. Mit δ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte Maßzahl eines der von beiden Geraden gebildeten Winkels, der nicht größer als ein rechter ist. Man überzeuge sich durch Zeichnungen, daß δ gleich $|\beta_2 - \beta_1|$ oder gleich dem Nebenwinkel von $|\beta_2 - \beta_1|$ ist, falls wir die Winkel β_1 und β_2 der Geraden (1) gegen die positive x -Achse nach Vorschrift von S. 13 bestimmen; z. B. ist im Falle der Fig. 18 der Winkel δ der Nebenwinkel von $(\beta_2 - \beta_1)$. In jedem Falle ist somit:

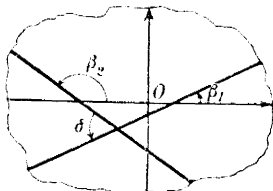


Fig. 18.

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} (\beta_2 - \beta_1) = \left| \frac{\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \beta_1}{1 + \operatorname{tg} \beta_2 \cdot \operatorname{tg} \beta_1} \right|,$$

wo, wie immer, durch zwei Vertikalstriche der absolute Betrag der eingeschlossenen Zahl bezeichnet ist.

Sind b_1 und b_2 von 0 verschieden, so hat man in $\operatorname{tg} \beta_1$ und $\operatorname{tg} \beta_2$ die Richtungskoeffizienten μ_1, μ_2 der ersten Normalgleichungen der Geraden vor sich, so daß nach S. 14:

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \mu_1 = -\frac{a_1}{b_1}, \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \mu_2 = -\frac{a_2}{b_2}$$

gilt. Es folgt somit:

$$(2) \quad \operatorname{tg} \delta = \left| \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \right|.$$

Diese Regel bleibt aber auch bestehen, wenn eine der Zahlen b_1, b_2 verschwindet oder beide gleich 0 sind; ist z. B. $b_2 = 0$ und $b_1 \neq 0$, so ist $\delta = |90 - \beta_1|$ und $\operatorname{tg} \beta_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, und man findet:

$$\operatorname{tg} \delta = |\operatorname{tg} (90 - \beta_1)| = |\cotg \beta_1| = \left| \frac{b_1}{a_1} \right|,$$

was mit Rücksicht auf $a_2 \neq 0$ auch von der Gleichung (2) geliefert wird. *Der einen rechten Winkel nicht übersteigende Winkel δ zwischen den beiden in rechtwinkligen Koordinaten durch (1) gegebenen Geraden ist demnach in jedem Falle durch die Gleichung (2) eindeutig bestimmt.*

Aus (2) folgt insbesondere: *Kennzeichen zweier parallelen Geraden ist $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, Kennzeichen zweier gegeneinander senkrechten oder „orthogonalen“ Geraden $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.* Weiter ergibt sich hieraus: Die zur Geraden der Gleichung:

$$(3) \quad ax + by = c$$

parallele Gerade durch den Punkt (x_0, y_0) ist durch:

$$(4) \quad ax + by = ax_0 + by_0 \quad \text{oder} \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

darstellbar, die zur Geraden (3) orthogonale Gerade durch den Punkt (x_0, y_0) aber durch:

$$(5) \quad bx - ay = bx_0 - ay_0 \quad \text{oder} \quad b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

§ 12. Ausdruck des Dreiecksinhalts in den Eckenkoordinaten.

Bei Gebrauch *rechtwinkliger* Koordinaten seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ drei nicht in einer Geraden liegende Punkte; sie bilden ein Dreieck, dessen von 0 verschiedener Inhalt durch J bezeichnet werde. Als „Grundlinie“ des Dreiecks betrachten wir die Verbindungsstrecke von (x_1, y_1) und (x_2, y_2) , deren Länge g durch:

$$g = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

gegeben ist ((2) S. 7). Die zugehörige Höhe h ist der Abstand der „Spitze“ (x_3, y_3) von der durch (4) S. 15 darstellbaren Grundlinie, so daß nach (1) § 10:

$$h = \frac{x_3(y_2 - y_1) + y_3(x_1 - x_2) - (x_1 y_2 - x_2 y_1)}{+ \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

gilt. Für den doppelten Inhalt $2J = gh$ folgt:

$$(1) \quad \pm 2J = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3).$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens nehmen wir eine stetige Verschiebung des Dreiecks ohne Gestaltänderung desselben in der Ebene vor. Hierbei wird sich J und damit der absolute Betrag der rechten Seite von (1) nicht ändern. Die in (1) rechts stehende Zahl kann aber auch keinen Zeichenwechsel erfahren, da sie $\neq 0$ ist und also ein Zeichenwechsel eine unstetige Wertänderung wäre, die bei stetiger Abänderung der Koordinaten ausgeschlossen ist. Bei der Verschiebung bleibt demnach der in (1) rechts stehende Wert konstant.

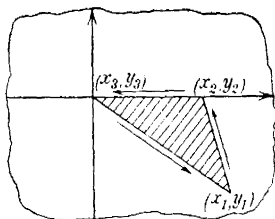


Fig. 19.

Wir verschieben jetzt (x_3, y_3) nach dem Nullpunkte O und (x_2, y_2) auf die positive x -Achse. Dann gilt $x_2 > 0$, $y_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, und in:

$$(2) \quad \pm 2J = -x_2 y_1$$

gilt zufolge der vorausgesandten Überlegung links dasselbe Vorzeichen wie in (1). Da aber $x_2 > 0$ ist, so gilt in (2) das obere oder untere Zeichen, je nachdem die von O verschiedene Zahl y_1 negativ oder positiv ist. Diese Fallunterscheidung läßt sich durch eine Regel bezeichnen, die bei der Verschiebung des Dreiecks sich als unveränderlich gültig erweist (Fig. 19): *In der für den doppelten Dreiecksinhalt aufgestellten Gleichung (1) gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem man beim Umlauf um das Dreieck von (x_1, y_1) über (x_2, y_2) nach (x_3, y_3) die Fläche des Dreiecks zur linken oder rechten Hand hat.*

§ 13. Bedingung für drei durch einen Punkt laufende Gerade.

Zwei Gerade G_1 und G_2 seien in einem beliebigen kartesischen Koordinatensystem durch:

$$(1) \quad a_i x + b_i y - c_i = 0, \quad (i = 1, 2)$$

gegeben. Zur Abkürzung bezeichne man die linke Seite der Gleichung (1) als „Funktion“ von x und y durch $f_i(x, y)$. Mit Hilfe

zweier *endlicher, nicht zugleich verschwindender* Multiplikatoren m_1, m_2 stelle man aus den Gleichungen (1) die neue Gleichung:

$$(2) \quad m_1 \cdot f_1(x, y) + m_2 \cdot f_2(x, y) \\ = (m_1 a_1 + m_2 a_2)x + (m_1 b_1 + m_2 b_2)y - (m_1 c_1 + m_2 c_2) = 0$$

her, die, falls die Koeffizienten von x und y nicht zugleich verschwinden, wieder eine Gerade darstellt.

Sind erstlich G_1 und G_2 *nicht parallel*, so können für kein Paar m_1, m_2 die Gleichungen:

$$(3) \quad m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0, \quad m_1 b_1 + m_2 b_2 = 0$$

zugleich bestehen. Aus (3) würde nämlich durch Kombination leicht:

$$m_1(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0, \quad m_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

folgen, so daß, da $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ gilt (S. 18), entgegen der Vorschrift m_1 und m_2 zugleich verschwinden würden. Die Gleichung (2) stellt demnach jetzt für jedes Paar m_1, m_2 eine Gerade dar. Diese Gerade läuft durch den Schnittpunkt S von G_1 und G_2 hindurch, da für dessen Koordinaten $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ zugleich verschwinden und also die Gleichung (2) erfüllt ist. Irgendeine Gerade durch S können wir durch die Forderung festlegen, daß sie durch den von S verschiedenen Punkt (x_0, y_0) hindurchlaufen solle. Diese Gerade aber gewinnen wir in (2) durch die Auswahl $m_1 = f_2(x_0, y_0)$ $m_2 = -f_1(x_0, y_0)$, zweier Multiplikatoren, die nicht beide gleich 0 sein können, da $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ nur für die Koordinaten von S zugleich verschwinden. *Die durch (2) dargestellte Gerade läuft demnach stets durch den Schnittpunkt von G_1 und G_2 hindurch, und jede durch diesen Punkt laufende Gerade ist in der Gestalt (2) darstellbar.*

Sind zweitens G_1 und G_2 *parallel und voneinander verschieden*, so gilt $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Man kann dann in jedem Falle eine endliche, nicht-verschwindende Zahl σ angeben, welche die Bedingungen:

$$(4) \quad a_2 = \sigma a_1, \quad b_2 = \sigma b_1, \quad c_2 \neq \sigma c_1$$

befriedigt, und zwar die Ungleichung deshalb, weil G_1 und G_2 nicht zusammenfallen sollten. Gleichung (2) nimmt jetzt die Form an:

$$(5) \quad (m_1 + \sigma m_2)a_1 x + (m_1 + \sigma m_2)b_1 y - (m_1 c_1 + m_2 c_2) = 0.$$

Vermeiden wir demnach Multiplikatoren, die die Gleichung

$$m_1 + \sigma m_2 = 0 \quad \text{oder} \quad m_1 : m_2 = -\sigma$$

erfüllen, so ist in (5) wieder eine Gerade und zwar eine zu G_1 und G_2 parallele Gerade dargestellt, von der wir auch sagen können, *sie laufe durch den unendlich fernen Schnittpunkt von G_1 und G_2 .*

Irgendeine zu G_1 und G_2 parallele Gerade können wir wieder durch die Forderung festlegen, daß sie durch den endlichen Punkt (x_0, y_0) hindurchlaufe. Durch die Wahl $m_1 = f_2(x_0, y_0)$, $m_2 = -f_1(x_0, y_0)$ wird diese Gerade gewonnen. Diese m_1, m_2 gehören nicht zu den ausgeschlossenen Multiplikatoren, die $m_1 + \sigma m_2 = 0$ befriedigen; denn es würde sonst mit Rücksicht auf die beiden Gleichungen (4):

$$m_1 + \sigma m_2 = f_2(x_0, y_0) - \sigma f_1(x_0, y_0) = \sigma c_1 - c_2 = 0$$

im Widerstreit zur Ungleichung (4) folgen. Der für zwei sich schneidende Gerade aufgestellte Satz gilt demnach unter Zulassung eines unendlich fernen Schnittpunktes S auch im Falle zweier voneinander verschiedenen parallelen Geraden G_1, G_2 .

Man kann daraufhin leicht eine Bedingung ableiten, die dafür charakteristisch ist, daß drei verschiedene Gerade G_1, G_2, G_3 durch einen und denselben Punkt hindurchlaufen. Die Geraden seien durch drei Gleichungen $f_i(x, y) = 0$, ($i = 1, 2, 3$) gegeben. Da aber G_3 durch den Schnittpunkt von G_1 und G_2 hindurchlaufen soll, so muß G_3 auch durch eine Gleichung der Gestalt (2) darstellbar sein. Nach S. 14 (Schlußsatz von § 8) muß es demnach einen endlichen, nicht-verschwindenden Faktor ($-m_3$) derart geben, daß $-m_3 \cdot f_3(x, y)$ mit der linken Seite der G_3 darstellenden Gleichung (2) identisch ist. Es besteht also die Gleichung:

$$(6) \quad m_1 \cdot f_1(x, y) + m_2 \cdot f_2(x, y) + m_3 \cdot f_3(x, y) = 0$$

identisch, d. h. für alle Wertepaare x, y . Übrigens ist auch keiner der Faktoren m_1, m_2 gleich 0; denn wäre etwa m_2 gleich 0, so würden $f_1(x, y)$ und $f_3(x, y)$ bis auf einen Faktor identisch sein und also G_1 und G_3 , der Annahme entgegen, zusammenfallen. Da endlich aus (6) auch umgekehrt folgt, daß G_3 statt durch $f_3(x, y) = 0$ auch durch $m_1 \cdot f_1(x, y) + m_2 \cdot f_2(x, y) = 0$ darstellbar ist, so gilt der Satz: *Drei durch die Gleichungen $f_i(x, y) = 0$ gegebene, voneinander verschiedene Gerade laufen stets und nur dann durch einen Punkt, wenn es drei von 0 verschiedene Zahlen m_i derart gibt, daß die Gleichung (6) eine identische ist.*

Als Beispiel betrachten wir die Mittellinien eines durch seine Ecken (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) festgelegten Dreiecks. Da die zur ersten Ecke gehörende Mittellinie durch die Punkte (x_1, y_1) und $(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2})$ hindurchläuft ((9) S. 9), so ist ihre Gleichung nach (4) S. 15:

$$x \left(\frac{y_2 + y_3}{2} - y_1 \right) + y \left(x_1 - \frac{x_2 + x_3}{2} \right) - \left(x_1 \frac{y_2 + y_3}{2} - y_1 \frac{x_2 + x_3}{2} \right) = 0.$$

Nach Multiplikation mit $\frac{2}{3}$ finden wir unter Benutzung der Abkürzung:

$$(7) \quad x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

die erste der drei folgenden Gleichungen:

$$x(y_0 - y_1) + y(x_1 - x_0) - (x_1 y_0 - y_1 x_0) = 0,$$

$$x(y_0 - y_2) + y(x_2 - x_0) - (x_2 y_0 - y_2 x_0) = 0,$$

$$x(y_0 - y_3) + y(x_3 - x_0) - (x_3 y_0 - y_3 x_0) = 0,$$

während die zweite und dritte Gleichung entsprechend die beiden anderen Mittellinien darstellen. Durch Addition dieser drei Gleichungen entsteht zufolge (7) eine identische Gleichung. *Die drei Mittellinien schneiden sich also in einem und demselben Punkte, dem Schwerpunkte des Dreiecks, dessen Koordinaten übrigens die in (7) berechneten x_0, y_0 sind.*

§ 14. Gleichung des Kreises in rechtwinkligen Koordinaten.

Um bei Gebrauch *rechtwinkliger* Koordinaten einen Kreis (d. i. eine Kreislinie) vom Radius ϱ und vom Mittelpunkt (α, β) durch eine Gleichung darzustellen, beachte man, daß der Kreis aus der Gesamtheit der Punkte (x, y) besteht, die vom Punkte (α, β) den Abstand ϱ haben. Aus (2) S. 7 folgt unmittelbar: *Die Gleichung des Kreises mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkte (α, β) ist in rechtwinkligen Koordinaten:*

$$(1) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$$

und also, wenn der Mittelpunkt insbesondere der Nullpunkt O ist:

$$(2) \quad x^2 + y^2 = \varrho^2,$$

so daß der Kreis zu den „*algebraischen Kurven zweiten Grades*“ gehört.

Die Gleichung (1) kann man durch Lösen der Klammern und Ordnen der Glieder in die Gestalt setzen:

$$(3) \quad x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

wobei also:

$$(4) \quad a = -\alpha, \quad b = -\beta, \quad c = \alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2$$

ist. Jede Gleichung (3) mit beliebigen Koeffizienten a, b und einem nur der Bedingung:

$$(5) \quad c < a^2 + b^2$$

genügenden Koeffizienten c stellt einen Kreis dar, nämlich denjenigen

vom Radius $+\sqrt{a^2+b^2}-c$ und dem Mittelpunkte $(-a, -b)$. Gleichung (1) möge die „erste“, Gleichung (3) die „zweite“ Kreisgleichung genannt werden.

§ 15. Darstellung der Kreistangenten.

Der Mittelpunkt des Kreises werde zum Nullpunkt des rechtwinkligen Systems und zugleich zum Pol eines Polarkoordinatensystems gewählt, dessen Achse die positive x -Achse ist. Das Lot von O auf eine Kreistangente hat den Berührungspunkt der letzteren zum Fußpunkte (Fig. 20). Sind die Polarkoordinaten dieses Fußpunktes ρ, α , so ist die vierte Normalgleichung (5) S. 16 der Tangente:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \rho.$$

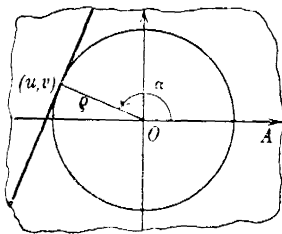


Fig. 20.

Fügen wir den Faktor ρ hinzu, so sind die links auftretenden Koeffizienten $\rho \cos \alpha$, $\rho \sin \alpha$ die rechtwinkligen Koordinaten des Berührungspunktes, die u, v genannt werden mögen: Die Tangente des Kreises (2) § 14 mit dem Berührungspunkte (u, v) hat die Gleichung:

$$(1) \quad xu + yv = \rho^2.$$

Nimmt man eine Translation der Achsen nach dem Punkte $(-\alpha, -\beta)$ als neuem Nullpunkte vor, so ist nach (1) S. 5 zu setzen $x = x' - \alpha$, $y = y' - \beta$, unter x', y' die neuen Koordinaten verstanden; insbesondere gilt für die neuen Koordinaten u', v' des Berührungspunktes $u = u' - \alpha$, $v = v' - \beta$, und die Gleichung des Kreises gewinnt im neuen System die Gestalt (1) S. 22. Aus (1) folgt unter Fortlassung der Indizes: Die Tangente des Kreises (1) S. 22 mit dem Berührungspunkte (u, v) hat die Gleichung:

$$(2) \quad (x - \alpha)(u - \alpha) + (y - \beta)(v - \beta) = \rho^2.$$

§ 16. Pol und Polare in bezug auf einen Kreis.

Der Kreis (2) § 14 heiße kurz K . Neben rechtwinkligen Koordinaten behalten wir die Polarkoordinaten von § 15 bei. Ein von O verschiedener Punkt (u, v) liefert eine durch:

$$(1) \quad xu + yv = \rho^2$$

dargestellte, dem Punkte eindeutig zugeordnete Gerade, welche als „Polare“ des Punktes (u, v) in bezug auf den Kreis K bezeichnet wird. Umgekehrt heißt (u, v) der „Pol“ der Geraden (1) in bezug

auf K , so daß eine beliebige, nicht durch O laufende Gerade $ax + by = c$ den Pol $\left(\frac{a\varrho^2}{c}, \frac{b\varrho^2}{c}\right)$ hat.

Sind $r = +\sqrt{u^2 + v^2}$ und α die Polarkoordinaten von (u, v) , so ist die vierte Normalgleichung der Polare (S. 16):

$$x \frac{u}{r} + y \frac{v}{r} = x \cos \alpha + y \sin \alpha = \frac{\varrho^2}{r} = r'.$$

Das Lot r' von O auf die Polare berechnet sich somit aus:

$$(2) \quad r r' = \varrho^2$$

und hat dieselbe Amplitude α wie der Pol (u, v) .

Um demnach für einen in K gelegenen Punkt P die Polare zu konstruieren (Fig. 21), zeichne man durch P die zu OP senkrechte Sehne BB' und bringe die Tangente des Berührungspunktes B mit der Verlängerung von OP in P' zum Schnitt. Hier verläuft die Polare $P'C$ von P senkrecht zu OP' . Es gilt nämlich:

$$OP \cdot OP' = OB^2$$

in Übereinstimmung mit (2), so daß P' der Punkt (r', α) ist. Für einen

außerhalb K gelegenen Punkt P' ist die Polare einfach die Gerade durch die Berührungspunkte B, B' der von P' an K laufenden Tangenten. Für einen Punkt P auf K ist die Polare natürlich mit der Tangente des Berührungspunktes P identisch. Die Konstruktion des Poles für eine nicht durch O laufende Gerade ergibt sich hieraus von selbst¹⁾.

Man beachte noch folgenden „Reziprozitätssatz“: *Liegt der Punkt (u_1, v_1) auf der Polare des Punktes (u, v) , so liegt auch umgekehrt der Punkt (u, v) auf der Polare von (u_1, v_1) .* Wird nämlich die Gleichung (1) durch (u_1, v_1) befriedigt, d. h. gilt $u_1 u + v_1 v = \varrho^2$, so heißt dies eben auch unmittelbar, daß der Punkt (u, v) die Gleichung $x u_1 + y v_1 = \varrho^2$ befriedigt. Beschreibt also (u_1, v_1) die Polare von (u, v) , so dreht sich die Polare von (u_1, v_1) um den Punkt (u, v) .

1) Rückt P in den Mittelpunkt O von K , so wandert die Polare $P'C$ ins Unendliche; man sagt, die Polare des Mittelpunktes O sei die „unendlich ferne Gerade“ der Ebene. Wandert P' in der Richtung OP' der Fig. 21 ins Unendliche, so wird die zugehörige Polare schließlich den zu OP' senkrechten Durchmesser von K erreichen.

§ 17. Inversion an einem Kreise.

Wir behalten die Koordinatensysteme und den Kreis K aus § 16 bei. Zwei Punkte P, P' gleicher Amplituden, deren Radienvektoren r, r' die Gleichung:

$$(1) \quad r \cdot r' = \varrho^2$$

befriedigen (z. B. die Punkte P und P' in Fig. 21), heißen bezüglich K einander „invers“, oder man sagt, sie gehen durch „Inversion“¹⁾ am Kreise K ineinander über. Beschreibt P eine Kurve, so beschreibt P' die „bezüglich K inverse Kurve“.

Durch die Gleichung:

$$(2) \quad a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0$$

kann man die Kreise und die Geraden der Ebene zusammenfassend darstellen, nämlich die Kreise für $a \neq 0$ und die Geraden für $a = 0$. Beschreibt P die Kurve (2), deren Gleichung in Polarkoordinaten:

$$ar^2 + 2r(b \cos \vartheta + c \sin \vartheta) + d = 0$$

ist, so folgt durch Multiplikation mit r'^2 bei Rücksicht auf (1) als Gleichung für die Koordinaten r', ϑ von P' :

$$dr'^2 + 2r'(b \cos \vartheta + c \sin \vartheta) + a\varrho^4 = 0$$

oder auf die rechtwinkligen Koordinaten x', y' von P' umgerechnet:

$$(3) \quad d(x'^2 + y'^2) + 2\varrho^2 bx' + 2\varrho^2 cy' + a\varrho^4 = 0.$$

Dies ist wieder die Gleichung eines Kreises bzw. für $d = 0$ diejenige einer Geraden. Indem man auf die besonderen Fälle $a = 0$ und $d = 0$ gleich Rücksicht nimmt, folgt: Ein nicht durch O laufender Kreis invertiert sich an K wieder in einen Kreis, der gleichfalls nicht durch O läuft; ein Kreis durch O ergibt bei der Inversion eine nicht durch O laufende Gerade und umgekehrt, während endlich eine Gerade durch O in sich selbst übergeht. So sind z. B. in bezug auf den in Fig. 22 stark ausgezogenen Kreis K die rechter Hand zur Polarachse senkrecht verlaufende Gerade und der innerhalb K gezeichnete Kreis invers.

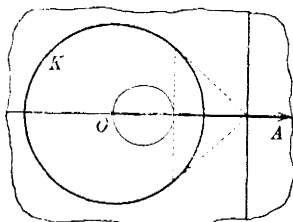


Fig. 22.

1) oder „Spiegelung“ an K oder durch „Transformation vermöge reziproker Radien“.

§ 18. Potenz, Potenzlinie und Potenzpunkt bei Kreisen.

Ein Kreis K sei durch seine „erste“ oder „zweite“ Gleichung, (1) oder (3) S. 22, gegeben. Ist (x_0, y_0) irgendein Punkt der Ebene, so heißt der Zahlwert:

$$(1) \quad \begin{aligned} p(x_0, y_0) &= (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - \varrho^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c \end{aligned}$$

die „Potenz“ des Punktes (x_0, y_0) in bezug auf den Kreis K . Da $(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2$ das Quadrat der Entfernung des Punktes (x_0, y_0) vom Mittelpunkt (α, β) ist, so ist $p(x_0, y_0) > 0$, $= 0$ oder < 0 , je nachdem (x_0, y_0) außerhalb K , auf K oder in K gelegen ist. Aus den Figuren 23 und 24 geht hervor: *Liegt (x_0, y_0)*

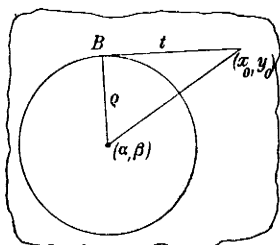


Fig. 23.

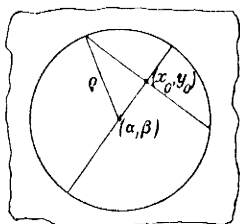


Fig. 24.

außerhalb K , so ist $p(x_0, y_0)$ die zweite Potenz t^2 der „Tangentenlänge“ t von (x_0, y_0) an K , wenn wir hierunter die Strecke auf einer der beiden Tangenten von (x_0, y_0) an K , gemessen von (x_0, y_0) bis zum Berührungspunkte B , verstehen; liegt (x_0, y_0) in K , so ist $|p(x_0, y_0)|$ die zweite Potenz der halben Sehne, die durch (x_0, y_0) zum Durchmesser dieses Punktes senkrecht verläuft.

Sind zwei nicht-konzentrische Kreise K_1 und K_2 durch:

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0, \\ x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben, so bezeichnen wir die Potenzen von (x_0, y_0) in bezug auf K_1 und K_2 durch $p_1(x_0, y_0)$ und $p_2(x_0, y_0)$. Der geometrische Ort aller Punkte (x_0, y_0) mit gleichen Potenzen $p_1(x_0, y_0)$, $p_2(x_0, y_0)$ heißt die „Potenzlinie“¹⁾ des Kreispaares K_1, K_2 . Die Gleichung der Potenzlinie ist:

$$p_1(x_0, y_0) - p_2(x_0, y_0) = 0$$

oder mit Rücksicht auf (2) bei Fortlassung der unteren Indizes 0:

$$(3) \quad 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0.$$

1) auch „Chordale“ oder „Radikalachse“ des Kreispaares genannt

Die Potenzlinie des Kreispaares K_1, K_2 ist demnach eine Gerade. Die Zentrale beider Kreise hat als Gerade durch die Mittelpunkte $(-a_1, -b_1), (-a_2, -b_2)$ die Gleichung ((4) S. 15):

$$x(b_1 - b_2) + y(a_2 - a_1) - (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

Nach S. 18 folgt: Die Potenzlinie von K_1 und K_2 verläuft senkrecht zur Zentrale. Da aus dem Bestehen zweier unter den drei Gleichungen (2), (3) die Gültigkeit der dritten folgt, so ergibt sich: *Schneiden sich K_1 und K_2 , so ist die Potenzlinie die Verbindungsgerade ihrer Schnittpunkte; berühren sich die Kreise, so ist die Potenzlinie ihre gemeinsame Tangente; haben K_1 und K_2 keinen Punkt gemein, so verläuft die Potenzlinie außerhalb beider Kreise und zieht (wie man gleich sehen wird) zwischen ihnen durch.*

Die Potenzlinie kann, insoweit sie außerhalb von K_1 und K_2 verläuft, auch als geometrischer Ort aller Punkte (x_0, y_0) mit gleichen Tangentenlängen t an K_1 und K_2 erklärt werden.¹⁾ Ein Kreis des Radius t um den Mittelpunkt (x_0, y_0) schneidet demnach K_1 und K_2 unter rechtem Winkel und heißt dieserhalb ein gemeinsamer „Orthogonalkreis“ von K_1 und K_2 (Fig. 25). Man gelangt so zu allen gemeinsamen Orthogonalkreisen von K_1 und

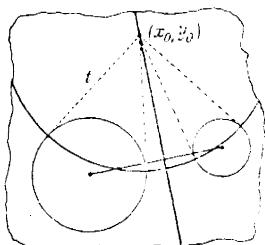


Fig. 25.

K_2 ; denn jeder solche Kreis liefert in seinem Mittelpunkte einen Punkt gleicher Tangentenlängen an K_1 und K_2 .

Es sei jetzt ein dritter weder mit K_1 noch mit K_2 konzentrischer Kreis K_3 durch:

$$(4) \quad x^2 + y^2 + 2a_3x + 2b_3y + c_3 = 0$$

gegeben. Wir können aus K_1, K_2, K_3 drei Kreispaaire herausgreifen, deren drei zugehörige Potenzlinien durch die Gleichungen dargestellt sind:

$$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0,$$

$$2(a_2 - a_3)x + 2(b_2 - b_3)y + (c_2 - c_3) = 0,$$

$$2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + (c_3 - c_1) = 0.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich eine identische Gleichung. Hieraus folgt, daß, wenn zwei unter den drei Potenzlinien zusammenfallen (§ 19), auch die dritte mit ihnen zusammenfällt. Liegt dieser besondere Fall nicht vor, so sind die drei Potenzlinien drei verschiedene Gerade, die nach einem S. 21 auf-

1) Hieraus geht hervor, daß im dritten der eben unterschiedenen Fälle die Potenzlinie zwischen K_1 und K_2 verläuft.

gestellten Satze durch „einen“ Punkt P laufen, den man als „Potenzpunkt“¹⁾ des Kreistripels K_1, K_2, K_3 bezeichnet.

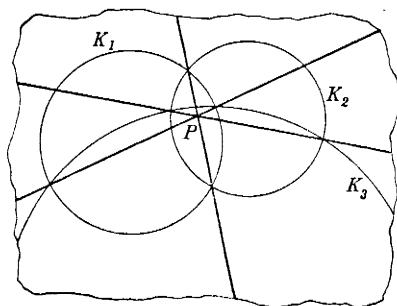


Fig. 26.

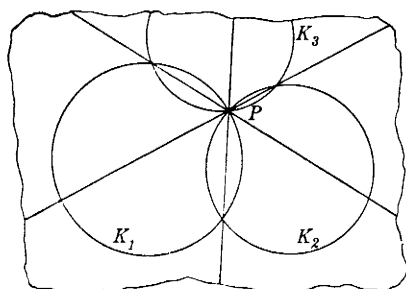


Fig. 27.

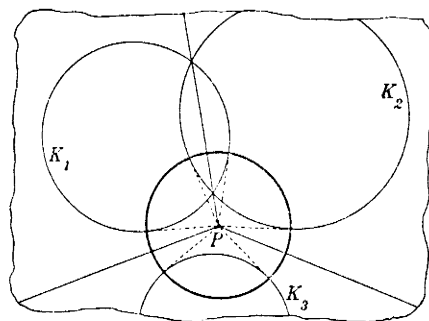


Fig. 28.

Betreffs der Lage des Potenzpunktes P sind drei verschiedene, durch die Figuren 26 ff. erläuterte Fälle möglich, je nachdem der gemeinsame Wert der Potenzen des Punktes P in bezug auf die drei Kreise < 0 , $= 0$ oder > 0 ist. Im ersten Falle liegt der Potenzpunkt P innerhalb jedes Kreises K ; im zweiten Falle laufen die drei Kreise durch einen Punkt, der dann zugleich der Potenzpunkt ist; im dritten Falle liegt P außerhalb jedes Kreises. Im letzten Falle ist P ein Punkt gleicher Tangentenlänge $t > 0$ für alle drei Kreise, und der Kreis des Radius t um den Mittelpunkt P wird gemeinsamer Orthogonalkreis für K_1, K_2, K_3 (in Fig. 28 stark ausgezogen).

§ 19. Konjugierte Kreisscharen.

Wie in § 18 seien K_1 und K_2 zwei nicht-konzentrische Kreise²⁾ der Gleichungen (2) S. 26. Mit Hilfe zweier endlicher, nicht zu-

1) auch „Radikalzentrum“ genannt.

2) Sind K_1 und K_2 konzentrisch, so gestalten sich die Entwicklungen des Textes sehr einfach: Die beiden konjugierten Kreisscharen bestehen aus dem System aller mit K_1 und K_2 konzentrischen Kreise und dem System aller Geraden durch den gemeinsamen Mittelpunkt. Man wolle hierauf im Laufe der Überlegung des § 19 wiederholt zurückkommen.

gleich verschwindender Multiplikatoren m_1, m_2 kombiniere man die Gleichungen von K_1 und K_2 zu:

$$(1) \quad (m_1 + m_2)(x^2 + y^2) + 2(m_1 a_1 + m_2 a_2)x + 2(m_1 b_1 + m_2 b_2)y + (m_1 c_1 + m_2 c_2) = 0.$$

Ersetzen wir m_1, m_2 durch zwei ihnen proportionale Multiplikatoren $\sigma m_1, \sigma m_2$, so wird durch die entstehende Gleichung keine andere Kurve dargestellt als durch (1). Zwei solche Gleichungen sind also nicht als wesentlich verschieden anzusehen. *Indessen haben wir noch den „einfach“ unendlich vielen Werten des Quotienten $m_1 : m_2$ entsprechend einfach unendlich viele wesentlich verschiedene Gleichungen (1).*

Für $m_1 + m_2 = 0$ und also $m_1 : m_2 = -1$ erhält man als einzige im Ansätze (1) enthaltene Gerade die *Potenzlinie* von K_1 und K_2 . Für $m_1 + m_2 \neq 0$ wird durch (1), sofern die der Ungleichung (5) S. 22 entsprechende Bedingung durch die Koeffizienten von (1) erfüllt wird, stets ein *Kreis* dargestellt. Das System aller durch den Ansatz (1) gelieferten Kreise, unter Einschluß der eben genannten Potenzlinie, als eines „Kreises mit unendlich großem Radius“, bezeichnen wir als eine „*Kreisschar*“.

Um die Gestalt der Kreisschar festzustellen, führen wir neue Koordinatenachsen ein, indem wir die Zentrale von K_1 und K_2 als x -Achse und ihre Potenzlinie als y -Achse wählen. Dann gilt $b_1 = 0, b_2 = 0$ und $c_1 = c_2$, so daß wir bei den c_1, c_2 die unterscheidenden Indizes fortlassen können. Für $m_1 + m_2 \neq 0$ kann man (1) in die Gestalt kleiden:

$$x^2 + y^2 + 2 \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} x + c = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = \mu \quad \text{und also} \quad m_1 : m_2 = (\mu - a_2) : (a_1 - \mu),$$

so entspricht jedem von -1 verschiedenen Quotienten $m_1 : m_2$, unter Einschluß des Wertes ∞ , d. i. des Falles $m_2 = 0$, ein eindeutig bestimmter endlicher Wert μ , und jedes endliche μ liefert einen eindeutig bestimmten, von -1 verschiedenen Wert des Quotienten $m_1 : m_2$. Die Kreisschar besteht neben der y -Achse (Potenzlinie) aus allen durch:

$$(2) \quad x^2 + y^2 + 2\mu x + c = 0 \quad \text{oder} \quad (x + \mu)^2 + y^2 = (\mu^2 - c)$$

mit endlichen Werten μ darstellbaren Kreisen; μ heißt der „*Parameter*“ der Gleichung (2). Die Werte $\mu = a_1$ und a_2 liefern insbesondere die Kreise K_1 und K_2 , von denen wir ausgingen.

Ist nun erstlich $c < 0$, so setzt sich die Kreisschar aus allen Kreisen zusammen, welche durch die beiden Punkte $(0, \pm \sqrt{-c})$

der y -Achse hindurchlaufen (stark ausgezogene Kreise der Fig. 29). Jeder Kreis (2) hat mit K_1 die y -Achse zur Potenzlinie. Nach S. 27 hat somit jeder außerhalb der Kreise (2) gelegene Punkt der y -Achse, d. h. jeder Punkt $(0, \mu')$ mit $\mu' > +\sqrt{-c}$, gleiche

Tangentenlänge $t > 0$ für alle Kreise der Schar. Dabei berechnet sich t aus μ' bei Gebrauch des zu $\mu = 0$ gehörenden Kreises (2) leicht zu $t = \sqrt{\mu'^2 + c}$. Hiernach ist der Punkt $(0, \mu')$ mit $\mu' > +\sqrt{-c}$ Mittelpunkt eines gegen alle Kreise der Schar (2) orthogonal verlaufenden Kreises, dessen Gleichung:

$$(3) \quad x^2 + (y - \mu')^2 = (\mu'^2 + c) \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 - 2\mu'y - c = 0$$

ist. Einige dieser Orthogonalkreise sind in Fig. 29 angedeutet.

Dreht man die Koordinatenachsen um O durch drei rechte Winkel, so ist, wenn x', y' die neuen Koordinaten sind, nach (5) S. 6 zu setzen $x = y'$ und $y = -x'$. Schreiben wir noch $-c = c'$, so ist die Gleichung (3) der fraglichen Orthogonalkreise:

$$(4) \quad x'^2 + y'^2 + 2\mu'x' + c' = 0,$$

und hier gilt alsdann $c' > 0$.

Da in (4) die Gleichung (2) wiedergewonnen ist, so erledigt sich der zweite Fall, daß nämlich in (2) das Absolutglied $c > 0$ ist, von selbst: Die Kreisschar besteht dann eben aus allen Orthogonalkreisen einer Kreisschar der zuerst besprochenen Art (Fig. 29). Zwei in

dieser Art einander orthogonale Kreisscharen bezeichnen wir als „konjugierte“ Kreisscharen.

Ist endlich $c = 0$, so besteht die Schar (2) aus allen Kreisen, welche die y -Achse im Nullpunkte berühren. Ein einzelner Punkt

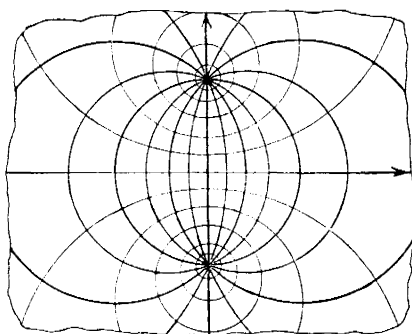


Fig. 29.

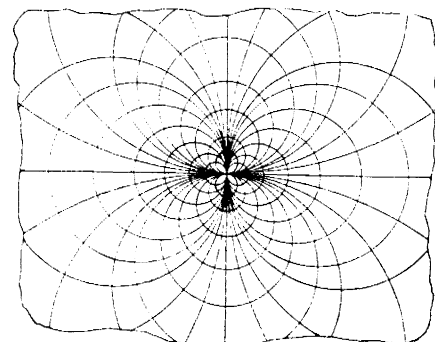


Fig. 30.

der y -Achse ($0, \mu'$) hat jetzt die Tangentenlänge $t = |\mu'|$ für alle Kreise der Schar; der Orthogonalkreis der Schar mit dem Mittelpunkt ($0, \mu'$) ist somit durch:

$$x^2 + y^2 - 2\mu'y = 0$$

dargestellt. Ihre Gesamtheit bildet die „konjugierte“ Kreisschar, welche mit der ersten Schar kongruent ist und aus ihr vermöge einer Drehung der Ebene um O durch einen rechten Winkel hervorgeht (Fig. 30).

Kap. III. Die Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln.

§ 20. Erklärung und Zeichnung der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

F_1 und F_2 seien zwei verschiedene Punkte der Ebene, deren halbe Entfernung gleich e oder deren Entfernung $\overline{F_1 F_2} = 2e$ sei; außerdem sei eine von e verschiedene positive Zahl a gegeben. Ist $a > e$, so gibt es in der Ebene Punkte P , für welche die Summe der Abstände $F_1 P$ und $F_2 P$ von F_1 und F_2 gleich $2a$ ist:

$$(1) \quad \overline{F_1 P} + \overline{F_2 P} = 2a;$$

der geometrische Ort aller dieser Punkte P heißt „Ellipse“, F_1 und F_2 sind ihre „Brennpunkte“¹⁾, e ihre „Exzentrizität“. Ist hingegen $a < e$, so gibt es in der Ebene Punkte P , deren Abstände $\overline{F_1 P}$ und $\overline{F_2 P}$ von F_1 und F_2 um $2a$ differieren²⁾:

$$(2) \quad |\overline{F_1 P} - \overline{F_2 P}| = 2a;$$

der geometrische Ort aller dieser Punkte P heißt „Hyperbel“, F_1 und F_2 werden als „Brennpunkte“, e als „Exzentrizität“ der Hyperbel bezeichnet.

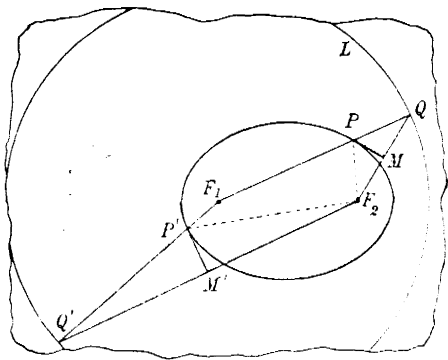


Fig. 31.

Weiter sei eine gerade Linie L und ein nicht auf ihr liegender Punkt F gegeben. Dann gibt es in der Ebene Punkte P , deren

1) auch „Fokalphunkte“ genannt und dieserhalb mit F bezeichnet.

2) In Gleichung (2) ist links der absolute Betrag genommen, damit sowohl $\overline{F_1 P}$ als $\overline{F_2 P}$ die größere Strecke sein kann.

Abstand von L gleich der Entfernung $F'P$ vom Punkte F ist; der geometrische Ort aller dieser Punkte P heißt „Parabel“, L „Leitlinie“ und F „Brennpunkt“ derselben.

Um Punkte der Ellipse zu konstruieren, ziehe man um F_1 als Mittelpunkt den Kreis des Radius $2a$, der „Leitkreis“ heiße und in Fig. 31 (S. 31) mit L bezeichnet ist; wegen $a > e$ liegt F_2 in L . Man ziehe sodann die Verbindungsgerade von F_2 nach irgendeinem Punkte Q von L , errichte im Mittelpunkt M auf derselben das Lot, auf welchem die durch F_1 und Q laufende Gerade einen Punkt P der Ellipse ausschneidet. Da nämlich $\overline{F_1Q} = \overline{F_1P} + \overline{PQ} = 2a$ ist und offenbar $\overline{F_2P} = \overline{PQ}$ gilt, so genügt P der Gleichung (1).

Führt man diese Konstruktion wiederholt durch (in der Fig. 31 ist noch ein zweiter Punkt P' konstruiert), so gelangt man zu dem in der Figur ange deuteten Bilde der Kurve.

Die entsprechende Konstruktion von Punkten der Hyperbel ist in Fig. 32 ausgeführt. Der „Leitkreis“ L ist wieder der Kreis des Radius

$2a$ um den Mittelpunkt F_1 , außerhalb dessen jetzt F_2 liegt (zufolge $a < e$). Im übrigen ist die Konstruktion mit denselben

Worten zu beschreiben wie bei der Ellipse. Dabei macht es einen Unterschied aus, ob die Verbindungsgerade F_2Q das Innere von L durchdringt oder außerhalb bleibt. Im letzteren Falle (durch die Konstruktion des Punktes P in Fig. 32 versinnlicht) beweist man leicht $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = 2a$ und gelangt durch wiederholte Ausführung der Konstruktion zu dem rechts liegenden „Zweige“ oder „Aste“ der in der Figur gezeichneten Hyperbel. Im ersteren Falle (s. den

Punkt P' der Figur) gilt $\overline{F_2P} - \overline{F_1P} = 2a$, und man wird zum links liegenden Hyperbelzweige geführt.

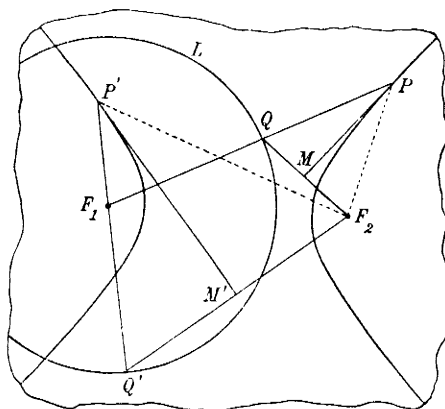


Fig. 32.

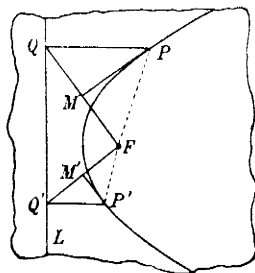
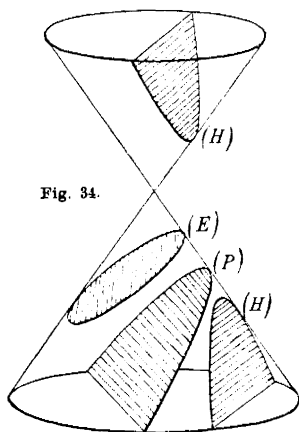


Fig. 33.

Die entsprechende Konstruktion der Parabel (Fig. 33) ist leicht verständlich; QP ist hier als ein auf der Leitgeraden L errichtetes Lot zu erklären.

Zusammenfassend bezeichnen wir die drei betrachteten Kurven hinfort als „*Kegelschnitte*“, da man sie als ebene Schnitte eines geraden Kreiskegels („*Doppelkegels*“) erklären kann. Je nach der Neigung der Schnittebene gegen die Kegelachse gelangt man zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel; die in Fig. 34 beige-fügte Skizze erinnere an diese bekannten Verhältnisse.¹⁾

Fig. 34.



§ 21. Besondere Gleichungen für Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Zur Darstellung der Kegelschnitte durch Gleichungen wählen wir *rechtwinklige* Koordinaten, und zwar laufe im Falle der Ellipse und Hyperbel die x -Achse durch die Brennpunkte, auf ihr sei O der Mittelpunkt der Strecke

$\overline{F_1 F_2}$, und die positive x -Achse laufe durch F_2 ; die Brennpunkte F_1, F_2 sind also die Punkte $(-e, 0)$ und $(+e, 0)$. Ist (x, y) der Punkt P , so gilt nach (2) S. 7:

$$\overline{F_1 P} = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \quad \overline{F_2 P} = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Zusammenfassend schreiben wir die Definitionsgleichungen (1) und (2) S. 31 für Ellipse und Hyperbel:

$$(\overline{F_1 P} \pm \overline{F_2 P})^2 = 4a^2,$$

wo das obere Zeichen die Ellipse und das untere die Hyperbel liefert. In x und y schreibt sich diese Gleichung:

$$(\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x-e)^2 + y^2})^2 = 4a^2$$

oder nach Ausrechnung des Quadrates und Division durch 2:

$$(x^2 + y^2 + e^2) \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2 x^2} = 2a^2,$$

$$(x^2 + y^2 + e^2) - 2a^2 = \mp \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2 x^2}.$$

1) Um die Parabel (P) und Hyperbel (H) vollständig zu gewinnen, hat man sich natürlich den Kegel nach unten und oben unbegrenzt zu denken.

Durch Quadrieren und Fortlassen überflüssiger Glieder und Faktoren ergibt sich bei geeigneter Anordnung der Glieder:

$$(1) \quad (a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Je nachdem die Ellipse oder Hyperbel vorliegt, ist $a > e$ oder $a < e$; um dies zum Ausdruck zu bringen, schreiben wir:

$$(2) \quad \begin{cases} a^2 - e^2 = +b^2 & \text{für die Ellipse,} \\ a^2 - e^2 = -b^2 & \text{für die Hyperbel.} \end{cases}$$

Durch Teilung der Gleichung (1) mit $a^2 \cdot b^2$ bzw. $-a^2 \cdot b^2$ folgt:
In bezug auf die gewählten besonderen Koordinatenachsen sind die Gleichungen von Ellipse und Hyperbel:

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bei der Parabel möge das Lot von F auf L die Länge p haben. Der Mittelpunkt dieses Lotes sei der Nullpunkt O ; das Lot selbst liefere die x -Achse, und die positive x -Achse laufe durch F . Die y -Achse des rechtwinkligen Systems läuft dann parallel zur Leitlinie im Abstände $\frac{1}{2}p$. Da F der Punkt $(\frac{1}{2}p, 0)$ ist, so gilt (Fig. 33):

$$FP = \sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2}, \quad PQ = x + \frac{1}{2}p,$$

und die Definitionsgleichung $\overline{FP} = \overline{PQ}$ der Parabel wird in x, y :

$$\sqrt{(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2} = x + \frac{1}{2}p.$$

Durch Quadrieren und zweckmäßige Anordnung der Glieder folgt:
In dem gewählten besonderen Koordinatensystem ist die Gleichung der Parabel:

$$(4) \quad y^2 = 2px.$$

Aus (3) und (4) folgt: *Die drei Kegelschnitte, Ellipse, Hyperbel und Parabel sind algebraische Kurven zweiten Grades (S. 12).*

Von den Gleichungen (3) und (4) aus gelangt man zu den im vorigen Paragraphen gezeichneten Gestalten der Kurven zurück, indem man nach y auflöst:

$$(5) \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad y = \pm \sqrt{2px}$$

und für die einzelnen x die zugehörigen y aufträgt. Um reelle y zu bekommen, ist bei der Ellipse $|x| \leq a$, bei der Hyperbel $|x| \geq a$ und bei der Parabel $x \geq 0$ zu nehmen. Da jede der Gleichungen (3) und (4) mit (x, y) auch durch $(x, -y)$ befriedigt wird, so ist *die x -Achse eine Symmetrieachse* für unsere Kurven; dagegen

ist die y -Achse nur für die Ellipse und Hyperbel eine Symmetrieachse. Da die Gleichungen (3) mit (x, y) auch durch den bezüglich O diametralen Punkt $(-x, -y)$ befriedigt werden, so gehört mit jedem Punkte P der Ellipse und Hyperbel auch der bezüglich O diametrale Punkt P' der Kurve an: Die durch O halbierte Sehne PP' heißt „Durchmesser“ (Diameter) der Kurve, ihre beiden durch O abgetrennten Hälften „Halbmesser“ (Radien) und O „Mittelpunkt“ der Kurve. Die Parabel hat keinen Mittelpunkt (s. hier überall die Figuren 35 ff.).

Bei der Ellipse heißen die auf den Koordinatenachsen gelegenen Durchmesser „Hauptachsen“. Insbesondere heißt der auf der

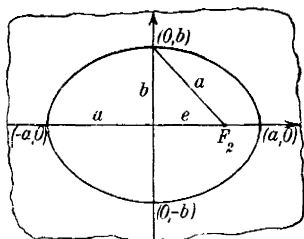


Fig. 35.

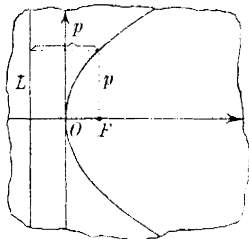


Fig. 36.

x -Achse gelegene Durchmesser der Länge $2a$ die „große Achse“, der auf der y -Achse gelegene Durchmesser der Länge $2b$ die „kleine Achse“; a und b selbst sind die große und kleine „Halbachse“. Die Endpunkte der Hauptachsen heißen „Scheitelpunkte“ der Ellipse, $(\pm a, 0)$ insbesondere „Scheitelpunkte der großen Achse“ und $(0, \pm b)$ „Scheitelpunkte der kleinen Achse“. Ist die Ellipse von (5) aus konstruiert, so gewinnt man auf Grund der aus (2) folgenden Gleichung $e^2 = a^2 - b^2$ die Brennpunkte als Schnittpunkte der x -Achse mit dem Kreise des Radius a um den Scheitelpunkt $(0, b)$ der kleinen Achse (s. überall Fig. 35).

Bei der Hyperbel heißt der auf der x -Achse liegende Durchmesser der Länge $2a$ die „Hauptachse“, die durch O in die beiden „Halbachsen“ a zerlegt wird. Die Endpunkte der Hauptachse sind die beiden „Scheitelpunkte“ der Hyperbel (s. Fig. 37 § 22 und die dort gegebenen Ausführungen).

Die Parabel läuft durch den Nullpunkt O , der als ihr „Scheitelpunkt“ bezeichnet wird (Fig. 36); die von ihm ausziehende positive x -Achse heißt „Achse“ der Parabel. Der auf der rechten Seite von (1) auftretende Faktor $2p$ von x heißt „Parameter“ der Parabel und p selbst „Halbparameter“; p wurde oben als Abstand des Brennpunktes F von der Leitlinie erklärt, kann aber auch als *Parabelordinate im Brennpunkt* F abgemessen werden (Fig. 36).

§ 22. Die Asymptoten der Hyperbel und die konjugierte Hyperbel.

Man vergleiche die beiden durch:

$$y' = \frac{b}{a} x, \quad y = + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2}$$

dargestellten Kurven, deren erste die Gerade durch die Punkte O und (a, b) ist, während die zweite einen Teil unserer Hyperbel darstellt. Für $x > a$ ist $y' > 0$, $y > 0$, beide Ordinaten wachsen mit wachsendem x und zwar zugleich mit x über alle Grenzen. Aus:

$$y'^2 - y^2 = b^2, \quad y' - y = \frac{b^2}{y' + y}$$

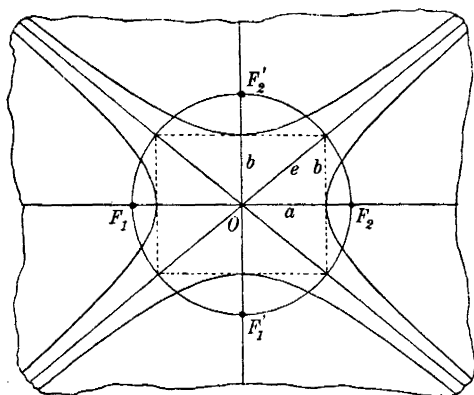


Fig. 37.

folgt, daß zwar für jedes endliche x noch $y' > y$ ist, daß aber die Differenz $(y' - y)$ bei wachsendem x beständig abnimmt und bei einem über alle Grenzen wachsenden x unter jede noch so klein gewählte positive Zahl herabsinkt. Berücksichtigen wir gleich noch die Symmetrie der Hyperbel in be-

zug auf die Koordinatenachsen, so folgt: *Die beiden Zweige der Hyperbel laufen nach vier Richtungen derart ins Unendliche, daß sie sich nach außenhin mehr und mehr den beiden durch:*

$$(1) \quad y = \pm \frac{b}{a} x \quad \text{oder} \quad \frac{x}{a} \mp \frac{y}{b} = 0$$

gegebenen Geraden, den sogenannten „Asymptoten“, annähern; für endliche x sind dabei die Hyperbelordinaten, absolut genommen, kleiner als die Asymptotenordinaten (Fig. 37).

Durch die Gleichung:

$$(2) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

wird eine Hyperbel dargestellt, deren Hauptachse $2b$ auf der y -Achse liegt, und die dieselbe Exzentrizität $e = \sqrt{b^2 + a^2}$ wie

die erste Hyperbel hat. Auch die Asymptoten sind beiden Hyperbeln gemeinschaftlich; doch ist beim einzelnen x die Ordinate der zweiten Hyperbel, absolut genommen, allemal größer als die zugehörige Asymptotenordinate. Beide Hyperbeln bezeichnet man als einander „konjugiert“. Die Hauptachse der einzelnen Hyperbel nennt man für die konjugierte Hyperbel „Nebenachse“ (s. überall Fig. 37).

Die vier auf den Asymptoten gelegenen Punkte $(\pm a, \pm b)$ haben vom Mittelpunkt O beider Hyperbeln den Abstand $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ein Kreis um O durch jene vier Punkte, der sogenannte „Exzentrizitätskreis“, schneidet somit auf den Koordinatenachsen die Brennpunkte F_1, F_2 und F'_1, F'_2 der beiden konjugierten Hyperbeln aus (Fig. 37).

§ 23. Zwei Regeln zur Zeichnung der Ellipse.

Durch die erste der beiden Gleichungen:

$$(1) \quad y' = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

wird der mit der Ellipse konzentrische Kreis des Radius a dargestellt, durch die zweite Gleichung die Ellipse selbst. Nehmen wir y und y' mit gleichem, etwa positivem Zeichen, so folgt beim einzelnen x für die zugehörigen Ordinaten $y : y' = b : a$ und damit der Satz: *Beim einzelnen x verhält sich die Ellipsenordinate y zur Ordinate y' des Kreises über der großen Achse $2a$ als Durchmesser, wie die halbe kleine Achse b zur halben großen Achse a .*

Um auf Grund dieses Satzes die Ellipse punktweise zu konstruieren, zeichne man um O als Mittelpunkt die Kreise der Radien a und b . Für einen beliebigen Punkt P' des größeren Kreises (Fig. 38) zeichne man die Ordinate $P'Q$ und den Radiusvektor OP' , welcher den kleineren Kreis im Punkte R schneide. Die zur x -Achse parallele Gerade durch R schneidet auf $P'Q$ einen Ellipsenpunkt P aus. Hier trifft in der Tat die Proportion zu:

$$\overline{PQ} : P'Q = \overline{OR} : OP' = b : a.$$

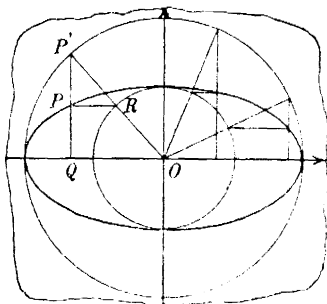


Fig. 38.

Man stelle sich vor, daß der kleinere Kreis zwar nach wie vor durch den Scheitelpunkt $(0, b)$ hindurchläuft, daß aber sein Mittelpunkt stetig von O aus die negative y -Achse beschreibt. An Stelle des Berührungspunktes $(0, -b)$ treten dann zunächst zwei ge-

trennte, zur y -Achse symmetrische Schnittpunkte von Kreis und Ellipse. Es entspricht dies der Auffassung, daß beim anfänglichen Kreise *zwei* Schnittpunkte desselben mit der Ellipse im Berührungspunkte $(0, -b)$ zusammenfallen, entsprechend natürlich zwei weitere im oberen festliegenden Berührungspunkte $(0, b)$. Ist β die veränderliche Mittelpunktsordinate des Kreises, so hat der Kreis die Gleichung:

$$(2) \quad x^2 + y^2 - b^2 - 2\beta(y - b) = 0;$$

die Ellipsengleichung setzen wir in die Gestalt:

$$(3) \quad x^2 + \frac{a^2}{b^2}(y^2 - b^2) = 0.$$

Faßt man diese Gleichungen als Bestimmungsgleichungen für die „Unbekannten“ x, y auf, so liefert die Auflösung in den vier Lösungssystemen die vier Schnittpunkte (x, y) von Kreis und Ellipse. Die vier Punkte haben zu je zwei gleiche Ordinaten; durch Elimination von x^2 aus (2) und (3) erhalten wir für die beiden im allgemeinen verschiedenen y der Schnittpunkte die quadratische Gleichung:

$$\frac{e^2}{b^2}(y^2 - b^2) + 2\beta(y - b) = (y - b) \left(\frac{e^2}{b^2}(y + b) + 2\beta \right) = 0.$$

Die Lösung $y = b$ liefert die beiden im Scheitelpunkte $(0, b)$ zusammenfallenden Schnittpunkte; für den besonderen Wert $\beta = -\frac{e^2}{b}$ wird auch die zweite Lösung $y = b$. Der Kreis des Mittelpunktes $(0, -\frac{e^2}{b})$ durch den Scheitelpunkt $(0, b)$ heißt der zugehörige „Scheitelkrümmungskreis“ der Ellipse: im Berührungspunkte $(0, b)$ fallen alle vier Schnittpunkte von Kreis und Ellipse zusammen.

Eine entsprechende Betrachtung kann man an den größeren Kreis der Fig. 38 anknüpfen, indem man den Berührungspunkt $(a, 0)$ mit der Ellipse festhält und den Mittelpunkt von O aus auf der x -Achse nach rechts wandern läßt: Der zum Punkte $(a, 0)$ gehörende „Scheitelkrümmungskreis“ der Ellipse ist der Kreis des Mittelpunktes $(\frac{e^2}{a}, 0)$ durch den Scheitelpunkt; auch hier fallen die vier Schnittpunkte von Kreis und Ellipse im Scheitelpunkte zusammen.

Zur Konstruktion der Scheitelkrümmungskreise verbinde man den Scheitelpunkt $(0, b)$ mit dem Brennpunkte F_2 geradlinig, fälle auf diese Gerade von O das Lot OD und errichte auf derselben

in F_2 das Lot $F_2 C$ (Fig. 39). Aus den Sätzen über Proportionen am rechtwinkligen Dreieck folgt (s. Fig. 35 S. 35):

$$\overline{OC} = \frac{c^2}{b}, \quad \overline{DF_2} = \frac{c^2}{a},$$

so daß C der Mittelpunkt des einen Scheitelkrümmungskreises ist, während der Mittelpunkt E des anderen die Entfernung $OE = \overline{DF_2}$ von O hat.

Die Scheitelkrümmungskreise schmiegen sich eng an die Ellipse an (Fig. 39). Da man sie bei gegebenen Halbachsen a, b leicht konstruieren kann, so liefern sie ein wertvolles Mittel, die zwischen ihnen verlaufende Ellipse mit großer Genauigkeit aus freier Hand zu zeichnen.

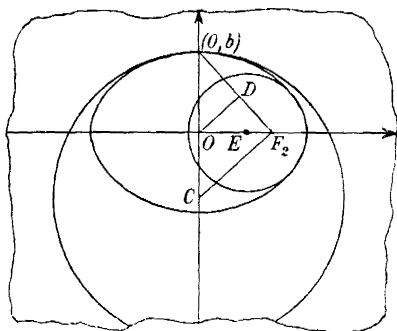


Fig. 39.

§ 24. Abschnittssatz der Hyperbel.

Wie man sich mit Fig. 37 S. 36 klar mache, schneidet eine zu einer Asymptote parallele, aber von ihr verschiedene Gerade:

$$(1) \quad y = \pm \frac{b}{a} x + v$$

die Hyperbel nur in einem (endlichen) Punkte. Irgendeine andere Gerade (in Fig. 40 in zwei Lagen gezeichnet) schneide die Hyperbel in den Punkten P_1, P_2 der Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 , ihre Asymptoten in den Punkten P'_1, P'_2 der Koordinaten x'_1, y'_1 und x'_2, y'_2 . Die Bezeichnungen seien so

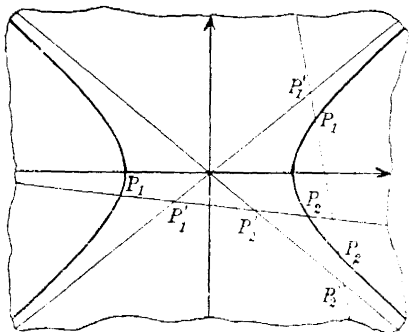


Fig. 40

verteilt, daß $P_1 P'_1$ und $P_2 P'_2$ die Abschnitte zwischen Kurve und Asymptoten sind (Fig. 40). Es gilt der Satz: *Auf jeder die Hyperbel und die Asymptoten schneidenden Geraden sind die Abschnitte zwischen der Hyperbel und den Asymptoten gleich, $P_1 P'_1 = P_2 P'_2$.*

Läuft die Gerade zu einer Koordinatenachse senkrecht, so ist der Satz aus der Symmetrie bezüglich dieser Achse einleuchtend. Für eine andere Gerade ist der Satz bewiesen, wenn wir zeigen können, daß der Mittelpunkt $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ der Strecke P_1P_2 mit dem Mittelpunkte $\left(\frac{x'_1+x'_2}{2}, \frac{y'_1+y'_2}{2}\right)$ der Strecke $P'_1P'_2$ zusammenfällt. Da beide Mittelpunkte auf der Geraden liegen und diese nicht zur y -Achse parallel läuft, so ist für den Zusammenfall der Mittelpunkte auch bereits die Gleichheit der Abszissen $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x'_1+x'_2}{2}$ und also das Bestehen der Gleichung

$$x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$$

ausreichend.

Setzen wir die Geradengleichung in der ersten Normalform (5) S. 14 gegeben voraus, so gilt der Richtungskoeffizient μ als endlich und von dem der Gleichung (1), d. i. von $\pm \frac{b}{a}$ verschieden. Die Wertepaare x_1, y_1 und x_2, y_2 sind die Lösungssysteme der „Bestimmungsgleichungen“:

$$y = \mu x + \nu, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

entsprechend sind die Paare x'_1, y'_1 und x'_2, y'_2 die Lösungssysteme der Bestimmungsgleichungen:

$$y = \mu x + \nu, \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

wo wir vermöge der letzteren „quadratischen“ Gleichung sogleich das „Asymptotenpaar“ darstellen können. Durch Elimination von y findet sich: x_1 und x_2 sind die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{(\mu x + \nu)^2}{b^2} - 1 \\ = \frac{1}{a^2 b^2} \{ (b^2 - a^2 \mu^2) x^2 - 2 a^2 \mu \nu x - a^2 (\nu^2 + b^2) \} = 0, \end{aligned}$$

x'_1 und x'_2 entsprechend diejenigen der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(\mu x + \nu)^2}{b^2} = \frac{1}{a^2 b^2} \{ (b^2 - a^2 \mu^2) x^2 - 2 a^2 \mu \nu x - a^2 \nu^2 \} = 0.$$

Da (wie festgestellt) $b^2 - a^2 \mu^2$ endlich und von 0 verschieden ist, so kann man diese quadratischen Gleichungen in:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{2 a^2 \mu \nu}{b^2 - a^2 \mu^2} x - \frac{a^2 (\nu^2 + b^2)}{b^2 - a^2 \mu^2} &= 0, \\ x^2 - \frac{2 a^2 \mu \nu}{b^2 - a^2 \mu^2} x - \frac{a^2 \nu^2}{b^2 - a^2 \mu^2} &= 0 \end{aligned}$$

umschreiben. Aus der Übereinstimmung der linearen Glieder dieser Gleichungen folgt die Gleichheit der Wurzelsummen

$$x_1 + x_2 = x_1' + x_2',$$

und damit ist der Abschnittssatz bewiesen.

Insbesondere folgt für den Zusammenfall der Punkte P_1 und P_2 :
Auf einer Hyperbeltangente sind die Abschnitte zwischen dem Berührungspunkte und den Asymptoten einander gleich.

Eine aus dem Abschnittssatze sich ergebende Hyperbelkonstruktion bei gegebenen Asymptoten und Scheitelpunkte A erläutert Fig. 41. Man ziehe gerade Linien durch A beiderseits bis zu den Asymptoten, die von der einzelnen Geraden in den Punkten B, C erreicht werden (Fig. 41). Trägt man AB von C aus auf der Geraden ab, so ist der Endpunkt D der Strecke $\overline{CD} = \overline{AB}$ ein Hyperbelpunkt.

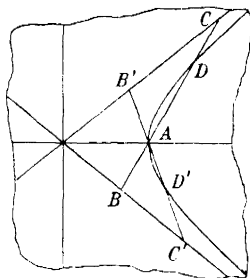


Fig. 41.

§ 25. Sekanten und Tangenten der Kegelschnitte.

Die „Scheiteltangenten“ der Kegelschnitte laufen, wie die Anschauung lehrt, stets parallel zu den Achsen der ausgewählten Koordinatensysteme. Ist der Punkt P der Koordinaten u, v ein von einem Scheitelpunkte verschiedener Punkt des einzelnen Kegelschnitts, so sei der Punkt P' der Koordinaten u', v' ein von P verschiedener Punkt des Kegelschnitts, der jedoch mit P innerhalb des gleichen Quadranten der Koordinatenachsen liege. Dann ist sicher *keine* der vier Größen $u' \pm u, v' \pm v$ gleich 0.

Die Sekante PP' stellen wir unter Benutzung der Zweipunktform (3) S. 15 durch die Gleichung dar:

$$(1) \quad \frac{y - v}{x - u} = \frac{v' - v}{u' - u}.$$

Man kann dieser Gleichung in den drei Fällen der Ellipse, Hyperbel und Parabel je eine nur für die einzelne Kurve charakteristische neue Gestalt verleihen. Setzt man für die Punkte (u', v') und (u, v) die Gleichungen der Ellipse oder der Hyperbel an, so folgt durch Subtraktion nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\frac{(u' + u)(u' - u)}{a^2} = \mp \frac{(v' + v)(v' - v)}{b^2}, \quad \frac{v' - v}{u' - u} = \mp \frac{b^2(u' + u)}{a^2(v' + v)},$$

wo das obere Zeichen der Ellipse und das untere der Hyperbel

angehört. Die Sekante PP' der Ellipse bzw. der Hyperbel ist also durch:

$$(2) \quad \frac{y-v}{x-u} = \mp \frac{b^2(u' + u)}{a^2(v' + v)}$$

darstellbar. Bei der Parabel gilt entsprechend:

$$v'^2 - v^2 = 2p(u' - u), \quad (v' + v)(v' - v) = 2p(u' - u);$$

die Sekante PP' der Parabel ist demnach gegeben durch:

$$(3) \quad \frac{y-v}{x-u} = \frac{2p}{v' + v}.$$

Wandert P' auf der Kurve bis zum Punkte P hin, so geht die Sekante in die „Tangente“ des Berührungspunktes P über. Für $u' = u$, $v' = v$ liefert die Gleichung (2):

$$\frac{y-v}{x-u} = \mp \frac{b^2 u}{a^2 v}, \quad \frac{xu - u^2}{a^2} \pm \frac{yv - v^2}{b^2} = 0$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß (u, v) die Kurvengleichung befriedigt:

$$(4) \quad \frac{xu}{a^2} \pm \frac{yv}{b^2} = 1.$$

Bei der Parabel findet man durch eine entsprechende Rechnung:

$$(5) \quad vy = p(x + u) \quad \text{oder} \quad 2uy = v(x + u).$$

Die Tangente der Ellipse und Hyperbel mit dem Berührungspunkte (u, v) ist durch (4), diejenige der Parabel durch (5) gegeben.

Man mache sich deutlich, daß diese Gleichungen auch für die Scheiteltangenten in Kraft bleiben.

§ 26. Tangentenkonstruktionen bei den Kegelschnitten.

Die durch (4) § 25 dargestellte Ellipsentangente schneidet die x -Achse im Punkte $\left(\frac{a^2}{u}, 0\right)$, dessen Lage von b und v unabhängig ist. Hieraus folgt, daß für alle Ellipsen mit derselben Hauptachse $2a$ die Tangenten der Berührungspunkte gleicher Abszisse u durch einen und denselben Punkt der x -Achse, nämlich den Punkt $\left(\frac{a^2}{u}, 0\right)$, hindurchlaufen. Unter diesen Ellipsen findet sich für $b = a$ insbesondere der Kreis des Radius a um O als „Ellipse mit der Exzentrizität 0“; bei ihm läuft die Tangente senkrecht zum Radius nach dem Berührungspunkte $(u, \sqrt{a^2 - u^2})$.

Die hieraus folgende Konstruktion der Ellipsentangente ist durch Fig. 42 erläutert. Man verlängert die Ordinate des mit P bezeichneten Punktes (u, v) zur Kreisordinate $P'Q$, errichtet im End-

punkt P' des Radius OP' das Lot, welches den Schnittpunkt S mit der x -Achse bildet, und gewinnt in der Geraden SP die Ellipsentangente.

Auch bei allen Hyperbeln mit derselben Hauptachse $2a$ laufen die Tangenten der Berührungspunkte gleicher Abszisse u zufolge (4) § 25 durch einen und denselben Punkt $(u^2, 0)$ der x -Achse.

Unter diesen Hyperbeln findet sich, dem betrachteten Kreise entsprechend, für $b=a$ die sogenannte „gleichseitige“ Hyperbel, deren Asymptoten als Winkelhalbierende des Achsenkreuzes aufeinander senkrecht stehen. Fig. 43 zeigt die Konstruktion der Hyperbeltangente mittels der gleichseitigen Hyperbel. Auf dem Radiusvektor OP' des Punktes $(u, \sqrt{u^2 - a^2})$ der gleichseitigen Hyperbel ist $P'R$ senkrecht errichtet; man hat also:

$$\overline{OQ} = u, \quad P'Q = v' = \sqrt{u^2 - a^2},$$

$$\overline{QR} = \frac{v'^2}{u} = u - \frac{a^2}{u}.$$

Trägt man also die Strecke QR von Q nach links auf die Strecke QS der x -Achse ab, so gilt:

$$\overline{OS} = \overline{OQ} - \overline{QS}$$

$$= u - \left(u - \frac{a^2}{u}\right) = \frac{a^2}{u},$$

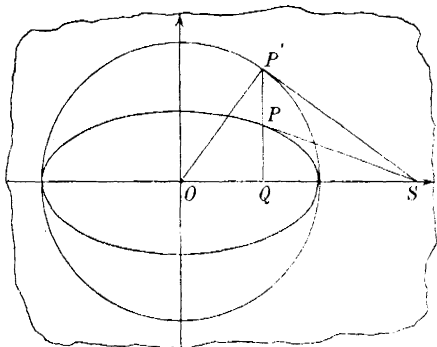


Fig. 42.

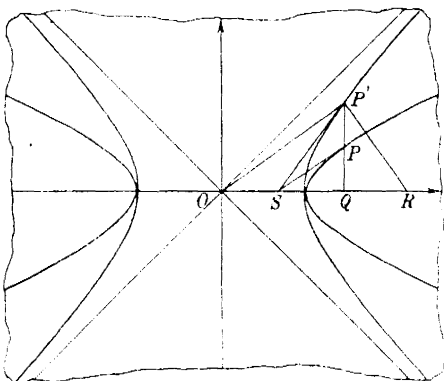


Fig. 43

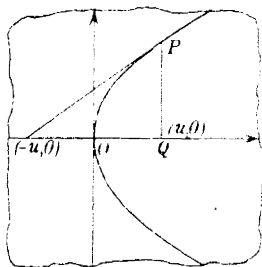


Fig. 44

d. h. der Punkt S ist der Schnittpunkt aller fraglichen Tangenten mit der x -Achse.

Bei der Parabel schneidet zufolge (5) § 25 die Tangente des Berührungspunktes (u, v) auf der x -Achse den Punkt $(-u, 0)$ aus. Die hieraus sich ergebende Tangentenkonstruktion (Fig. 44, S. 43) ist einleuchtend.

§ 27. Die Asymptoten der Hyperbel als Koordinatenachsen.

Der Winkel zwischen den Asymptoten, welcher von der positiven x -Achse halbiert wird, sei gleich w ; dann gilt (Fig. 37, S. 36):

$$(1) \quad \cos \frac{w}{2} = \frac{a}{e}, \quad \sin \frac{w}{2} = \frac{b}{e}, \quad \sin w = \frac{2ab}{e^2}.$$

Die weiterhin zu benutzenden Polarkoordinaten beziehen sich auf O als Pol und die positive x -Achse als Achse. Eine Tangente am rechtsliegenden Zweige der Hyperbel mit dem Berührungspunkte (u, v) möge die Asymptoten in den Punkten

$$\left(r_1, \frac{w}{2}\right) \text{ und } \left(r_2, 360^\circ - \frac{w}{2}\right)$$

treffen. Dann befriedigen die rechtwinkligen Koordinaten dieser Punkte:

$$x = r_1 \cos \frac{w}{2}, \quad y = r_1 \sin \frac{w}{2}$$

und

$$x = r_2 \cos \frac{w}{2}, \quad y = -r_2 \sin \frac{w}{2}$$

die Gleichung (4) § 25 der Tangente:

$$r_1 \left(\frac{u}{a^2} \cos \frac{w}{2} - \frac{v}{b^2} \sin \frac{w}{2} \right) = 1, \quad r_2 \left(\frac{u}{a^2} \cos \frac{w}{2} + \frac{v}{b^2} \sin \frac{w}{2} \right) = 1.$$

Multipliziert man diese Gleichungen miteinander und benutzt (1), so folgt:

$$r_1 r_2 \left(\frac{u^2}{a^4} \cos^2 \frac{w}{2} - \frac{v^2}{b^4} \sin^2 \frac{w}{2} \right) = \frac{r_1 r_2}{e^2} \left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} \right) = 1,$$

sowie weiter, da der Punkt (u, v) die Hyperbelgleichung befriedigt:

$$(2) \quad r_1 r_2 = e^2, \quad \frac{1}{2} r_1 r_2 \cdot \sin w = ab.$$

Die letzte Gleichung ergibt den Satz: *Das von einer Hyperbeltangente und den Asymptoten eingegrenzte Dreieck hat den konstanten (d. i. für alle Tangenten gleichen) Inhalt $a \cdot b$.*

Die Asymptoten sollen als neue Koordinatenachsen mit dem Achsenwinkel w eingeführt werden, und zwar sei die neue positive x -Achse die nach rechts und unten weisende Asymptote, die neue positive y -Achse die nach rechts und oben weisende. Da der

Berührungspunkt P der Tangente nach S. 41 die zwischen den Asymptoten gelegene Strecke $\overline{P_1'P_2'}$ der Tangenten halbiert, so werden die Parallelen PQ und PR (Fig. 45) zu den neuen Achsen (Asymptoten) in Q und R die Mittelpunkte der Strecken $\overline{OP_2'} = r_2$ und $\overline{OP_1'} = r_1$ ausschneiden. Die neuen Koordinaten des Punktes P der Hyperbel sind demnach:

$$x = \overline{OQ} = \frac{1}{2} r_2,$$

$$y = \overline{OR} = \frac{1}{2} r_1.$$

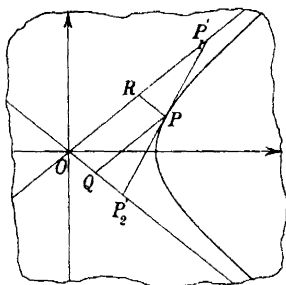


Fig. 45.

Daraufhin liefert die erste Gleichung

(2) den Satz: *Die Gleichung der Hyperbel in bezug auf die Asymptoten als Koordinatenachsen ist:*

$$(3) \quad 4xy = c^2.$$

Man hat nur noch zu beachten, daß diese Gleichung auch für den Punkt $(-x, -y)$ richtig ist, falls sie für (x, y) gilt; sie liefert also auch den zweiten eben nicht in Betracht gezogenen Hyperbelzweig.

§ 28. Konjugierte Durchmesser der Ellipse.

Zufolge (4) S. 42 sind die Tangenten in den beiden Endpunkten (u_1, v_1) und $(-u_1, -v_1)$ eines Ellipsendurchmessers parallel. Es gilt der Satz: *Zeichnet man zu den Tangenten in den Endpunkten $(\pm u_1, \pm v_1)$ eines ersten Ellipsendurchmessers den parallelen Durchmesser, so ist zu den Tangenten in dessen Endpunkten umgekehrt wieder der erste Durchmesser parallel.* Ist der erste Durchmesser eine Hauptachse, so ist der zweite Durchmesser die andere Hauptachse, und der Satz ist aus der Symmetrie der Ellipse in bezug auf die Hauptachsen klar. Liegt dieser Fall nicht vor, so sind u_1, v_1 von 0 verschieden. Die beiden Durchmesser stellen wir dann durch:

$$(1) \quad xv_1 - yu_1 = 0, \quad x \frac{u_1}{a^2} + y \frac{v_1}{b^2} = 0$$

dar. Hat also der zweite Durchmesser die Endpunkte $(\pm u_2, \pm v_2)$ so gilt:

$$(2) \quad u_2 : v_2 = \frac{v_1}{b^2} : -\frac{u_1}{a^2}.$$

Der zu den Tangenten in diesen Punkten $(\pm u_2, \pm v_2)$ parallele Durchmesser hat also die Gleichung:

$$\frac{xu_2}{a^2} + \frac{yv_2}{b^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{a^2 b^2} (xv_1 - yu_1) = 0,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Zwei Ellipsendurchmesser, von denen jeder den Tangenten in den Endpunkten des anderen parallel ist, heißen einander „konjugiert“. Benutzen wir O als Pol und die positive x -Achse als Polarachse, so mögen die beiden Durchmesser (1) die Amplituden φ und ψ haben, die wir (je unter den beiden Möglichkeiten) $< 180^\circ$ wählen. In $\operatorname{tg} \varphi$ und $\operatorname{tg} \psi$ hat man die Richtungskoeffizienten der Geraden (1) vor sich, so daß die Gleichungen gelten:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_1}{u_1}, \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{b^2 u_1}{a^2 v_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Die Amplituden φ und ψ zweier konjugierter Durchmesser sind durch die in ihnen symmetrische dritte Gleichung (3) verknüpft.

Ist, wie in Fig. 46, $\psi > \varphi$, so gilt für den Winkel $w = \psi - \varphi$ zwischen den beiden konjugierten Durchmessern:

$$\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} (\psi - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi}$$

und also mit Benutzung der dritten Relation (3):

$$(4) \quad \operatorname{tg} w = -\frac{a^2 \operatorname{tg} \varphi + b^2 \operatorname{ctg} \varphi}{e^2}.$$

Hiernach hat, $e > 0$ vorausgesetzt, für $0 < \varphi < 90^\circ$ notwendig $\operatorname{tg} w$ einen endlichen negativen Wert. Es folgt: Bei einer eigentlichen Ellipse ($e > 0$) bilden die Hauptachsen das einzige Paar zueinander senkrechter konjugierter Durchmesser; dreht sich der eine

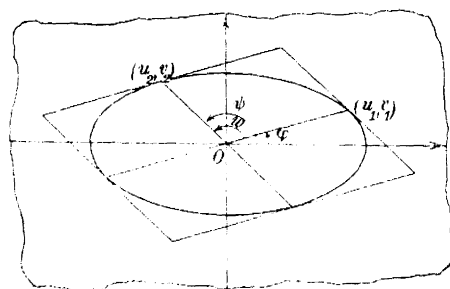


Fig. 46.

Durchmesser um O , indem seine Amplitude von 0° bis 90° wächst, so weicht ihm der konjugierte Durchmesser aus, indem dessen Amplitude ψ von 90° bis 180° wächst; dabei liegt $w = \psi - \varphi$, solange $0 < \varphi < 90^\circ$ gilt, im Intervall $90^\circ < w < 180^\circ$. Der Fall $e = 0$ ist einfach:

Beim Kreise (Ellipse der Exzentrizität $e = 0$) sind je zwei zueinander senkrechte Durchmesser konjugiert.

Aus (4) folgt für $0 < \varphi < 90^\circ$ und $e > 0$:

$$\frac{e^2 \operatorname{tg} w}{ab} - 2 = \frac{a \operatorname{tg} \varphi}{b} - 2 + \frac{b}{a \operatorname{tg} \varphi} = \left(\sqrt{\frac{a \operatorname{tg} \varphi}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a \operatorname{tg} \varphi}} \right)^2 \geq 0$$

wo das Gleichheitszeichen nur für $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ zutrifft. Also gilt:

$$\operatorname{tg} w \geq \frac{2ab}{e^2}, \quad \operatorname{tg} w \leq -\frac{2ab}{e^2}$$

und damit der Satz: *Der größte Winkel w mit $\operatorname{tg} w = -\frac{2ab}{e^2}$ wird erreicht für $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, $\operatorname{tg} \psi = -\frac{b}{a}$.* Die Lage der fraglichen, zu den Hauptachsen symmetrischen konjugierten Durchmesser zeigt Fig. 47.

Verlängern wir die Ordinaten v der Ellipsenpunkte (u, v) nach

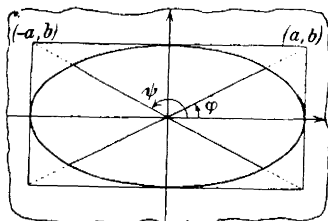


Fig. 47.

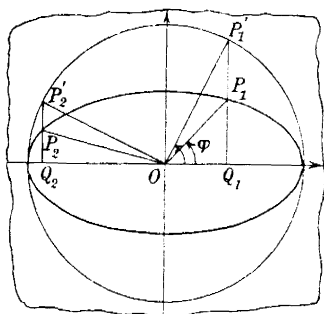


Fig. 48.

dem Verhältnis $\frac{a}{b}$ zu $v' = \frac{a}{b} v$, so erhalten wir nach S. 37 die Punkte (u, v') des Kreises über der großen Achse $2a$ als Durchmesser. Den in Fig. 48 mit P_1 und P_2 bezeichneten Endpunkten unserer konjugierten Durchmesser (1) entsprechen so die Punkte P_1' und P_2' des Kreises. Die Polarkoordinaten von P_1 und P_1' seien a', φ und a, φ' , die von P_2 und P_2' aber b', ψ und a, ψ' , so daß insbesondere a' und b' die „konjugierten Halbmesser“ OP_1 und OP_2 sind. Es gilt (Fig. 48):

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{v_1'}{u_1} = \frac{a}{b} \frac{v_1}{u_1} = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \psi' = \frac{v_2'}{u_2} = \frac{a}{b} \frac{v_2}{u_2} = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi,$$

woraus auf Grund der dritten Gleichung (3) weiter folgt:

$$(5) \quad \operatorname{tg} \varphi' \cdot \operatorname{tg} \psi' = \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -1, \quad \operatorname{tg} \psi' = -\operatorname{cotg} \varphi'.$$

Die den konjugierten Ellipsenhallmessern OP_1 und OP_2 zugeordneten Kreisradien OP_1' und OP_2' stehen aufeinander senkrecht.

Mit Benutzung dieses Ergebnisses folgt weiter aus Fig. 48:

$$(6) \quad \begin{cases} OQ_1 = a' \cos \varphi = a \cos \varphi', \\ OQ_2 = b' \cos \psi = a \cos \psi' = -a \sin \varphi', \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \overline{P_1 Q_1} = a' \sin \varphi = \frac{b}{a} \cdot a \sin \varphi' = b \sin \varphi', \\ \overline{P_2 Q_2} = b' \sin \psi = \frac{b}{a} \cdot a \sin \psi' = b \cos \varphi'. \end{cases}$$

Aus (6) folgt durch Quadrieren und Addieren beider Gleichungen:

$$a'^2 \cos^2 \varphi + b'^2 \cos^2 \psi = a^2,$$

entsprechend aus (7):

$$a'^2 \sin^2 \varphi + b'^2 \sin^2 \psi = b^2$$

und durch Addition beider Ergebnisse:

$$(8) \quad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

Die Summe der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser der Ellipse ist konstant (d. i. für alle Paare gleich) und natürlich insbesondere gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen a, b .

Durch Multiplikation der ersten Gleichung (6) und der zweiten Gleichung (7) folgt:

$$a' b' \sin \psi \cos \varphi = a b \cos^2 \varphi',$$

entsprechend durch Multiplikation der zweiten Gleichung (6) und der ersten Gleichung (7):

$$a' b' \cos \psi \sin \varphi = -a b \sin^2 \varphi'$$

und durch Subtraktion der Ergebnisse:

$$(9) \quad \begin{aligned} a' b' \sin(\psi - \varphi) \\ = a' b' \sin w = a b. \end{aligned}$$

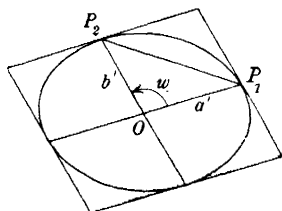


Fig. 49.

Das Dreieck der Ecken O, P_1, P_2 hat demnach den konstanten Inhalt $\frac{1}{2} ab$.

Wir geben diesem Resultat die Gestalt

(Fig. 49): *Die Tangenten in den Endpunkten irgend zweier konjugierter Durchmesser der Ellipse bilden ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm vom konstanten Inhalt $4ab$.*

§ 29. Zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse als Koordinatenachsen.

Irgend zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse mögen zu Achsen für neue kartesische Koordinaten x', y' gewählt werden. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen von § 28 liefere der Halbmesser $\overline{OP_1} = a'$ die positive x' -Achse, der Halbmesser $\overline{OP_2} = b'$ die positive y' -Achse; w ist der Achsenwinkel.

Nach S. 12 ist die Gleichung der Ellipse in x', y' wieder vom

zweiten Grade. Für die allgemeine Gleichung zweiten Grades benutzen wir später die Schreibweise:

$$(1) \quad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2Dx' + 2Ey' + F = 0,$$

d. h. wir nehmen (zur Abkürzung gewisser unten aufzustellender Gleichungen) in einige Glieder des Ansatzes (1) Faktoren 2 auf. Da nun O nicht auf der Ellipse liegt, so ist $F \neq 0$; wir teilen die Gleichung durch $-F$ und gelangen zu einer Gleichung der Gestalt:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' = 1.$$

Da O Mittelpunkt ist und also mit (x', y') stets auch $(-x', -y')$ die Gleichung befriedigt, gilt mit der letzten Gleichung für jeden Ellipsenpunkt auch:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 - 2D'x' - 2E'y' = 1$$

und also auch die halbe Summe beider Gleichungen:

$$(2) \quad A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 = 1,$$

was einfach darauf hinausläuft, daß $D' = 0$, $E' = 0$ zutreffen muß (vgl. (3) S. 67). Die Parallele zur y' -Achse durch den Punkt $(a', 0)$ ist die Tangente der Ellipse mit dem Berührungspunkt $(a', 0)$, d. h. die aus (2) durch Eintragung von $x' = a'$ zu gewinnende Gleichung für y' :

$$C'y'^2 + 2B'a'y' + (A'a'^2 - 1) = 0$$

muß die Doppelwurzel $y' = 0$ haben; es ist demnach $B' = 0$. $A'a'^2 = 1$. Indem man entsprechend die zur x' -Achse parallele Tangente des Berührungspunktes $(0, b')$ heranzieht, folgt: *Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein Paar konjugierter Durchmesser $2a'$, $2b'$ als Koordinatenachsen, ist:*

$$(3) \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Die Gleichung (3) S. 34 ist als besonderer Fall hierin enthalten.

Bei gegebenem x' (oder y') liefert (3) zwei entgegengesetzte Werte y' (bzw. x'): *Die zu einem Durchmesser parallelen Schnur werden vom konjugierten Durchmesser halbiert.* Wir hätten geradezu die Erklärung aufstellen können: *Bei einer Schar paralleler Schnur bilden die Mittelpunkte der letzteren einen Durchmesser, welcher zu dem Durchmesser unter den Schnur als „konjugiert“ bezeichnet wird.*

§ 30. Konjugierte Durchmesser der Hyperbeln.

Bei den Hyperbeln kann man die Überlegungen betreffend die konjugierten Durchmesser unter Benutzung der Asymptoten sehr

einfach gestalten.¹⁾ Zieht man von einem von O verschiedenen Punkt A einer Asymptote (Fig. 50) die beiden Tangenten mit den Berührungspunkten P_1 und P_2 an die beiden konjugierten Hyperbeln (S. 37), und erreichen diese Tangenten die andere Asymptote in B und C , so sind nach S. 44 die beiden Dreiecke OAB und OAC inhaltsgleich (beide haben den Inhalt $a \cdot b$), und P_1 und P_2 sind die Mittelpunkte der Seiten AB und AC . Faßt man OA als gemeinsame Grundlinie der Dreiecke, so folgt die Gleichheit der zugehörigen Höhen und damit die Gleichheit von

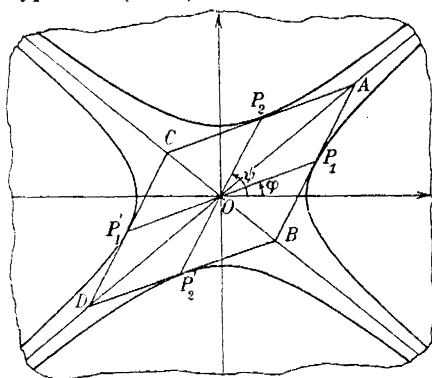


Fig. 50.

OB und OC . Da somit O die Mitte von BC , P_1 die von AB und P_2 die von AC ist, so folgt $OP_1 \parallel AC$ und $OP_2 \parallel AB$. Reproduzieren wir die ganze Figur noch vermöge einer Drehung um O durch 180° (Fig. 50), so folgt: Von den Durchmessern P_1P_1' und P_2P_2' der beiden konjugierten Hyperbeln ist jeder den Tangenten in den Endpunkten des anderen parallel; sie heißen „konjugierte Durchmesser“ des Hyperbelpaares.

Wir übertragen die Bezeichnungen von §§ 28 und 29, indem wir die konjugierten Halbmesser $OP_1 = a'$ und $OP_2 = b'$ setzen, ihnen die Amplituden φ und ψ erteilen und übrigens die Koordinaten von P_1 wieder u_1, v_1 nennen. Dann gilt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_1}{u_1}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{b^2 u_1}{a^2 v_1},$$

insofern $\operatorname{tg} \psi$ der Richtungskoeffizient der Tangente (4) S. 42 der Hyperbel im Punkte P_1 ist. Durch Multiplikation der vorstehenden Gleichungen folgt:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = + \frac{b^2}{a^2}.$$

Die Amplituden φ und ψ zweier konjugierter Durchmesser des Hyperbelpaares sind durch die in φ und ψ symmetrische Beziehung (1) verknüpft.

1) Man kann natürlich auch dieselben Methoden wie in §§ 28 und 29 anwenden.

Aus Fig. 50 ist unmittelbar einleuchtend: *Wächst die Amplitude φ von 0^0 bis zum halben „Asymptotenwinkel“ $\frac{1}{2}w$, so nimmt ψ von 90^0 bis $\frac{1}{2}w$ ab; nimmt φ von 0^0 bis $-\frac{1}{2}w$ ab, so wächst die Amplitude ψ des konjugierten Halbmessers von 90^0 bis $(180^0 - \frac{1}{2}w)$. Längs der Asymptoten kommen also je zwei konjugierte Durchmesser zum Zusammenfall, entsprechend dem Umstande, daß die Gleichung (1) durch:*

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi = \pm \frac{b}{a}$$

erfüllt ist. Auch hier bilden die Hauptachsen $2a$ und $2b$ das einzige Paar zueinander senkrechter konjugierter Durchmesser.

Da die Dreiecksflächen OAB und OAC gleich $a \cdot b$ sind, so folgt weiter: *Die Tangenten in den Endpunkten irgend zweier konjugierter Durchmesser des Hyperbelpaares bilden ein Parallelogramm vom konstanten Inhalt $4ab$, dessen Ecken (wie wir wiederholen) auf den Asymptoten liegen.* Nehmen wir die Bezeichnungen $OA = r_1$ und $OB = \overline{OC} = r_2$ von S. 44 wieder auf, so ergibt der Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke OAC und OAB :

$$4a'^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos w, \quad 4b'^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos w.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen voneinander, Division des Ergebnisses durch 4 und Benutzung von (2) S. 44 folgt:

$$a'^2 - b'^2 = r_1r_2 \cos w = e^2 \left(\cos^2 \frac{w}{2} - \sin^2 \frac{w}{2} \right)$$

und hieraus weiter mit Benutzung von (1) S. 44:

$$(2) \quad a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$$

Die Differenz der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser des Hyperbelpaares ist konstant und natürlich insbesondere gleich der Differenz der Quadrate der Halbachsen a, b .

Wählt man ein Paar konjugierter Durchmesser $2a', 2b'$ zu Achsen für neue Koordinaten x', y' , so gelten wieder die Betrachtungen von S. 49. Die erste Hyperbel (diejenige der Hauptachse $2a$) wird durch eine Gleichung der Gestalt:

$$(3) \quad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = 1$$

darstellbar sein. Zur linken Seite dieser Gleichung kann man auch dadurch gelangen, daß man in die linke Seite $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$ der ursprünglichen Hyperbelgleichung die linearen Ausdrücke der alten x, y in den neuen x', y' einträgt. Die Gleichung (2) S. 36 der konjugierten Hyperbel wird demnach in den x', y' :

$$(4) \quad Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = 1.$$

Nun benutzen wir (S. 49) weiter, daß die Gleichung (3) für $x' = a'$ die Doppelwurzel $y' = 0$ haben muß, woraus $Aa'^2 = 1$, $B = 0$ folgt, sowie daß (4) für $y' = b'$ die Doppelwurzel $x' = 0$ besitzt, was $Cb'^2 = -1$, $B = 0$ liefert. Die Gleichungen des Hyperbelpaares, bezogen auf ein Paar konjugierter Durchmesser $2a'$, $2b'$ als Koordinatenachsen, sind:

$$(5) \quad \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = \pm 1.$$

Aus (5) folgt wie bei der Ellipse: Die zu einem Durchmesser parallelen Sehnen jeder der beiden Hyperbeln werden vom konjugierten Durchmesser bzw. dessen Verlängerung halbiert. Auch wäre es wieder möglich gewesen, die Erklärung konjugierter Durchmesser an einen Satz über die Mittelpunkte paralleler Sehnen zu knüpfen.

§ 31. Supplementäre Sehnen der Ellipse und der Hyperbel.

Zwei Sehnen der Ellipse oder der Hyperbel, welche von einem Kurvenpunkte A aus nach den von A verschiedenen Endpunkten B , C eines Durchmessers ziehen, heißen „*supplementäre Sehnen*“. Die zu zwei supplementären Sehnen parallelen Geraden durch O

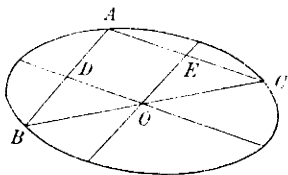


Fig. 51.

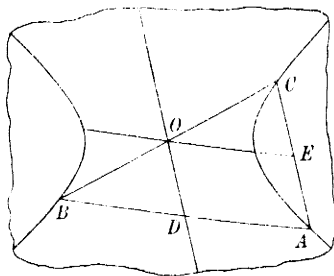


Fig. 52.

liefern zwei konjugierte Durchmesser. Im Falle der Ellipse (Fig. 51) folgt aus $DO \parallel AC$ und $EO \parallel AB$ leicht, daß D und E die Mittelpunkte der beiden Sehnen sind. Der Durchmesser DO halbiert also die zum Durchmesser EO parallele Sehne AB , so daß nach § 29 (letzter Absatz) der Durchmesser DO zu EO konjugiert ist. Eine entsprechende Schlußfolgerung für die Hyperbel knüpft man an Fig. 52.

Mittels supplementärer Sehnen kann man für eine gegebene Ellipse die Hauptachsen konstruieren, für eine gegebene Hyperbel Haupt- und Nebenachse. Man zeichne z. B. im Falle der Ellipse zunächst irgendeinen Durchmesser BC (indem man etwa zwei beliebige parallele Sehnen zieht und ihre Mittelpunkte geradlinig

verbindet) und über demselben einen Halbkreis, der die Ellipse im Punkte A kreuze (Fig. 53). Dann sind AB und AC zwei gegeneinander senkrechte supplementäre Sehnen; also sind die ihnen parallelen Durchmesser OE und OD konjugiert und zueinander senkrecht, d. h. sie liefern nach S. 46 die Hauptachsen. Im Falle der Hyperbel gilt eine entsprechende Konstruktion.

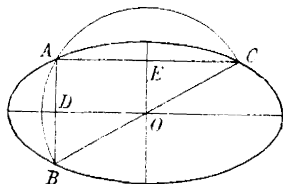


Fig. 53.

§ 32. Durchmesser und konjugierte Tangenten bei der Parabel.

Nach (5) S. 42 ist die Parabeltangente des Berührungspunktes O' der Koordinaten x_0, y_0 durch die erste der Gleichungen:

$$(1) \quad y_0 y = p(x + x_0), \quad y_0^2 = 2px_0$$

dargestellt, deren zweite zum Ausdruck bringt, daß (x_0, y_0) auf der Parabel liegt (Fig. 54). Für den Winkel w zwischen der nach „oben“ gerichteten Tangente und der positiven x -Achse gilt, daß $\operatorname{tg} w$ der Richtungskoeffizient in der ersten Normalgleichung der Tangente (1) sein würde:

$$(2) \quad \operatorname{tg} w = \frac{p}{y_0}, \quad y_0 \sin w = p \cos w.$$

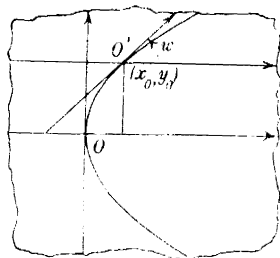


Fig. 54.

Wir führen ein neues Koordinatensystem ein mit O' als Nullpunkt, einer mit der x -Achse parallel und gleichgerichteten x' -Achse und der nach oben gerichteten Tangente des Punktes O' als positiver y' -Achse. Der Übergang von den alten zu den neuen Koordinaten ist durch eine Translation und nachherige Transformation (2) S. 5 zu vollziehen und ergibt demgemäß:

$$(3) \quad x = x' + y' \cos w + x_0, \quad y = y' \sin w + y_0.$$

Die Parabelgleichung $y^2 = 2px$ wird also im neuen System:

$$(y' \sin w + y_0)^2 = 2p(x' + y' \cos w + x_0)$$

$$y'^2 \sin^2 w + 2y_0 \sin w \cdot y' + y_0^2 = 2px' + 2p \cos w \cdot y' + 2px_0.$$

Zufolge (1) heben sich die Absolutglieder y_0^2 und $2px_0$ gegenseitig auf, desgleichen zufolge (2) die in y' linearen Glieder. Die

Gleichung der Parabel im neuen System hat die mit der ursprünglichen Gleichung gleichgebaute Gestalt:

$$(4) \quad y'^2 = 2p'x', \quad p' = \frac{p}{\sin^2 w}.$$

Zu jedem positiven x' berechnen sich aus (4) zwei entgegengesetzte Werte y' . Heißt eine von einem Parabelpunkte ausziehende, der Parabelachse parallele und gleichgerichtete Gerade ein „Durchmesser“ der Parabel und nennen wir den Durchmesser und die Tangente in seinem Anfangspunkte einander „konjugiert“¹⁾, so ergibt sich: *Die zu einer Tangente parallelen Sehnen der Parabel werden durch den zur Tangente konjugierten Durchmesser halbiert.* Man kann auch umgekehrt von einer Schar paralleler Sehnen ausgehen, deren Mittelpunkte eine zur x -Achse parallele Gerade, den „der Sehnenrichtung konjugierten“ Durchmesser liefern.

Die Gleichung (5) S. 42 einer beliebigen Tangente soll noch auf die neuen Koordinaten umgerechnet werden. Hat der Berührungspunkt (u, v) die neuen Koordinaten u', v' , so gilt zufolge (3):

$$u = u' + v' \cos w + x_0, \quad v = v' \sin w + y_0.$$

Die transformierte Gleichung (5) S. 42 der Tangente ist also:

$$\begin{aligned} & (v' \sin w + y_0)(y' \sin w + y_0) \\ &= p(x' + y' \cos w + x_0 + u' + v' \cos w + x_0), \\ & \quad v'y' \sin^2 w + y' \cdot y_0 \sin w + v' \cdot y_0 \sin w + y_0^2 \\ &= p(x' + u') + y' \cdot p \cos w + v' \cdot p \cos w + 2px_0 \end{aligned}$$

und kürzt sich demnach auf Grund von (1), (2) und (4) zu:

$$(5) \quad v'y' = p'(x' + u').$$

Im neuen System hat auch die Tangentengleichung der Parabel für den Berührungspunkt (u', v') die mit der ursprünglichen Gleichung (5) S. 42 gleichgebaute Gestalt (5).

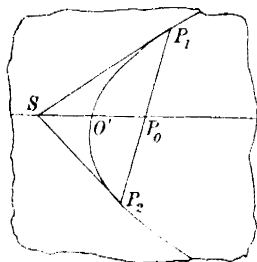


Fig. 55.

Die am Schlusse von § 26 S. 44 angedeutete Konstruktion der Parabeltangente überträgt sich demnach auf das neue System. Man kann diesem Ergebnis auch folgenden Ausdruck verleihen: *Zieht man in den Endpunkten P_1, P_2 einer Parabelsehne die Tangenten, so liegt ihr Schnittpunkt S auf der durch die*

1) Diese Erklärung gelte auch für Achse und Scheiteltangente; einzig in diesem Falle stehen Durchmesser und konjugierte Tangente aufeinander senkrecht.

Schnenmitte P_0 zur Parabelachse parallelen Geraden, und der Schnittpunkt O' dieser Geraden mit der Parabel halbiert die Strecke SP_0 (Fig. 55). Im zugehörigen neuen Koordinatensystem haben nämlich die beiden Tangenten die Gleichungen $\pm v'y' = p'(x' + u')$, woraus der Satz folgt.

§ 33. Brennpunkteigenschaften der Ellipse.

Die Geradenstrecken $r_1 = \overline{F_1P}$, $r_2 = \overline{F_2P}$ von den Brennpunkten nach einem Punkte P der Ellipse nennt man „*Brennstrahlen*“ des Punktes P . Sind u, v die Koordinaten von P , so gilt (S. 33):

$$r_1^2 = (u + c)^2 + v^2, \quad r_2^2 = (u - c)^2 + v^2,$$

woraus man mit Benutzung von $r_1 + r_2 = 2a$ durch Subtraktion findet:

$$r_1^2 - r_2^2 = 2a(r_1 - r_2) = 4eu, \quad r_1 - r_2 = \frac{2eu}{a}.$$

Mit nochmaliger Benutzung von $r_1 + r_2 = 2a$ folgt: *Die Brennstrahlen des Punktes (u, v) stellen sich in der Abszisse u so dar:*

$$(1) \quad r_1 = a + \frac{eu}{a}, \quad r_2 = a - \frac{eu}{a}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergibt sich bei Benutzung der Relation $e^2 = a^2 - b^2$:

$$r_1 r_2 = a^2 - \frac{e^2 u^2}{a^2} = a^2 - \frac{(a^2 - b^2) u^2}{a^2} = a^2 - u^2 + b^2 \cdot \frac{u^2}{a^2}.$$

Zur Umwandlung des letzten Gliedes benutze man die von (a, c) befriedigte Ellipsengleichung:

$$r_1 r_2 = a^2 - u^2 + b^2 \left(1 - \frac{u^2}{b^2}\right) = a^2 + b^2 - (u^2 + v^2).$$

Die Summe in der letzten Klammer ist gleich dem Quadrat des Halbmessers $OP = a'$; es gilt also:

$$a'^2 + r_1 r_2 = a^2 + b^2.$$

Der Vergleich mit (8) S. 48 liefert den Satz: *Das Produkt $r_1 r_2$ der Brennstrahlen des Punktes P ist gleich dem Quadrat b'^2 des zum Halbmesser $\overline{OP} = a'$ konjugierten Halbmessers b' :*

$$(2) \quad r_1 r_2 = b'^2.$$

Dieser Halbmesser b' (in Fig. 56 durch OP' bezeichnet) läuft zur Tangente im Punkt P parallel. Fassen wir demnach b' als Grundlinie des Dreiecks $OP'P$, so ist dessen Höhe gleich dem Lote p (Fig. 56) von O auf die Tangente. Der doppelte Inhalt des Dreiecks ist also gleich $b'p = p\sqrt{r_1 r_2}$; und da dieser doppelte

Inhalt nach (9) S. 48 andererseits gleich $a \cdot b$ ist, so folgt als Ausdruck des Lotes p von O auf die Tangente in den Brennstrahlen des Berührungspunktes:

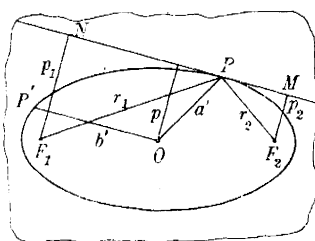


Fig. 56.

$$(3) \quad p = \frac{ab}{\sqrt{r_1 r_2}}$$

Die vierte Normalgleichung (5) S. 16 der Tangente ist:

$$x \frac{p^u}{a^2} + y \frac{p^v}{b^2} - p = 0.$$

Nach S. 17 findet man durch Eintragung der Koordinaten $(\mp e, 0)$

von F_1 und F_2 in die linke Seite dieser Gleichung die Längen p_1 und p_2 der Lote von F_1 und F_2 auf die Tangente:

$$p_1, p_2 = \mp e \frac{p^u}{a^2} - p = \frac{p}{a} \cdot \left[a \pm \frac{eu}{a} \right].$$

Mit Benutzung von (1) und (3) folgt: Die Lote p_1 und p_2 von den Brennpunkten F_1 und F_2 auf eine Ellipsentangente stellen sich in den Brennstrahlen des Berührungspunktes so dar:

$$(4) \quad p_1 = \frac{p}{a} r_1 = b \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, \quad p_2 = \frac{p}{a} r_2 = b \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}.$$

In Fig. 56 sind die beiden Lote p_1 und p_2 durch $F_1 N$ und $F_2 M$ dargestellt. Da aus (4) die Proportion $p_1 : r_1 = p_2 : r_2$ folgt, so sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke $F_1 N P$ und $F_2 M P$ ähnlich, und also ist $\angle F_1 P N = \angle F_2 P M$: Eine Ellipsentangente bildet mit den Brennstrahlen ihres Berührungspunktes gleiche Winkel.¹⁾

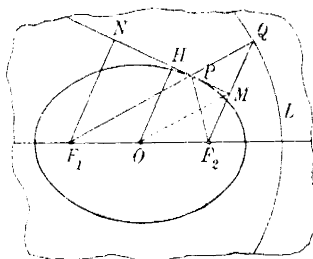


Fig. 57.

Die zur Ellipsenkonstruktion dienende Fig. 31, S. 31, ist hier neben als Fig. 57 wiederholt und ergänzt. Da für das Mittellot MP der Strecke $F_2 Q$ die Gleichung $\angle F_2 P M = \angle Q P M$ gilt, so bildet das über P hinaus verlängerte Mittellot mit den Brennstrahlen von P gleiche Winkel

und liefert demnach sogleich auch die Tangente des Berührungspunktes P . Da O und M die Mitten der Strecken $F_1 F_2$ und $F_2 Q$

1) Von F_1 ausgehende Lichtstrahlen konvergieren nach Reflexion an der Ellipse nach dem anderen „Brennpunkte“ F_2 .

sind, so sind die Dreiecke OF_2M und F_1F_2Q ähnlich, woraus für die dritten Seiten folgt:

$$\overline{OM} : \overline{F_1Q} = \overline{OM} : 2a = \overline{OF_2} : \overline{F_1F_2} = 1 : 2.$$

Somit ist $\overline{OM} = a$. Das Lot von O auf die Tangente trifft den Mittelpunkt H der Strecke MN (denn es gilt $\overline{HN} : \overline{HM} = \overline{OF_1} : \overline{OF_2}$); demnach ist auch $\overline{ON} = \overline{OM} = a$: Fällt man von den Brennpunkten die Lote auf die Ellipsentangenten, so bilden die Lotfußpunkte den mit der Ellipse konzentrischen Kreis des Radius a .

Nennen wir diesen Kreis K und den um F_1 beschriebenen Leitkreis wie bisher L , so ergibt sich folgende Konstruktion der Tangente für gegebenen Berührungspunkt P . Die Gerade von F_1 durch P schneide L im Punkt Q (Fig. 58), die Verbindungsgerade QF_2 schneide K in M ; dann ist MP die Tangente. Für das Tangentenpaar von einem außerhalb der Ellipse gelegenen Punkte A aber ergibt sich folgende Konstruktion (Fig. 59): Der Kreis des Radius $\overline{AF_2}$ um den Mittelpunkt A schneide L in den Punkten Q und Q' . Die Geraden F_1Q und F_1Q' schneiden auf der Ellipse die Berührungspunkte P und P' der gesuchten Tangenten aus.

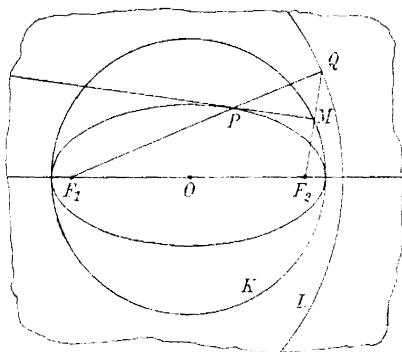


Fig. 58.

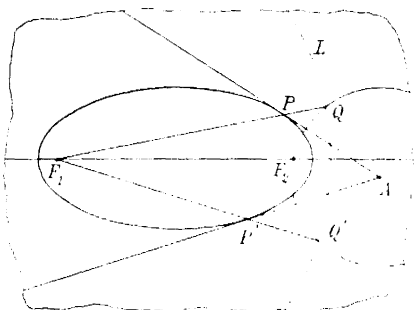


Fig. 59.

§ 34. Brennpunkteigenschaften der Hyperbel.

Die vorstehenden Entwicklungen übertragen sich größtenteils wörtlich auf die Hyperbel. Für die Quadrate der „Brennstrahlen“ $r_1 = \overline{F_1P}$, $r_2 = \overline{F_2P}$ nach dem Hyperbelpunkte (u, v) gelten wieder die beiden ersten in § 33 angegebenen Darstellungen, aus denen:

$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4a^2$$

folgt. Benutzen wir die S. 16 erklärte Bezeichnung $\text{sgn}(u)$ für das Vorzeichen von u , so gilt:

$$r_1 - r_2 = \text{sgn}(u) \cdot 2a,$$

da $r_1 > r_2$ oder $r_1 < r_2$ gilt, je nachdem u positiv oder negativ ist. Die Brennstrahlen r_1, r_2 des Hyperbelpunktes (u, v) stellen sich in der Abszisse u so dar:

$$(1) \quad r_1 = \text{sgn}(u) \left(\frac{eu}{a} + a \right), \quad r_2 = \text{sgn}(u) \left(\frac{eu}{a} - a \right).$$

Bei Rücksicht auf $c^2 = a^2 + b^2$ folgt weiter mit Benutzung der für (u, v) gültigen Hyperbelgleichung:

$$r_1 r_2 = \frac{(a^2 + b^2)u^2}{a^2} - a^2 = u^2 - a^2 + b^2 \cdot \frac{u^2}{a^2} = u^2 - a^2 + b^2 + v^2.$$

Ist also wieder a' der Halbmesser des Punktes (u, v) und b' der konjugierte Halbmesser, so ergibt sich zufolge (2) S. 51:

$$(2) \quad r_1 r_2 = b'^2,$$

so daß das Produkt $r_1 r_2$ der Brennstrahlen des Punktes (u, v) wieder gleich dem Quadrat des zum Halbmesser des Punktes (u, v) konjugierten Halbmessers b' ist.

Die Lote von O, F_1 und F_2 auf die Tangente des Berührungspunktes (u, v) seien wieder gleich p, p_1 und p_2 . Das in Fig. 45 S. 45 durch $OP_1'P_2'$ bezeichnete Dreieck aus der Tangente und den Asymptoten hat, falls man $P_1'P_2' = 2b'$ als Grundlinie und entsprechend p als Höhe faßt, den Inhalt pb' . Da der Inhalt nach (2) S. 44 andererseits gleich $a \cdot b$ ist, so findet man p in derselben Art wie bei der Ellipse durch r_1 und r_2 ausgedrückt. Auch p_1 und p_2 findet man wie oben durch Vermittlung der vierten Normalgleichung der Tangente: Die Lote p, p_1 und p_2 vom Mittelpunkt O und den Brennpunkten F_1 und F_2 auf die Tangente des Berührungspunktes (u, v) stellen sich in dessen Brennstrahlen r_1, r_2 so dar:

$$(3) \quad p = \frac{ab}{\sqrt{r_1 r_2}}, \quad p_1 = b \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, \quad p_2 = b \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}.$$

Aus $p_1 : r_1 = p_2 : r_2$ folgt jetzt (Fig. 60) der Satz: Die Tangente des Punktes (u, v) halbiert den Winkel zwischen den zugehörigen Brennstrahlen.¹⁾ Ein Blick auf Fig. 32 S. 32 lehrt daraufhin wieder, daß die bei der Hyperbelkonstruktion benutzten Mit-

1) Von einem Brennpunkte ausgehende Lichtstrahlen, die am einen oder am anderen Zweige der Hyperbel reflektiert werden, divergieren nach der Reflexion so, als kämen sie vom anderen Brennpunkte.

tellote MP , $M'P'$ der Strecken F_2Q , F_2Q' zugleich die Hyperbel-
 tangente der Berührungspunkte P , P' liefern. Auch ist leicht ein-
 zusehen, daß die Fuß-
 punkte der Lote von F_1 und
 F_2 auf die Hyperbeltan-
 genten (Punkte M , M' der
 Fig. 32 S. 32) wieder die
 Peripherie K des Kreises
 vom Radius a um O bilden.
 Die sich hieraus ergeben-
 den Tangentenkonstruk-
 tionen mittels der Kreise
 K und L gestalten sich bei
 der Hyperbel genau so
 wie bei der Ellipse.

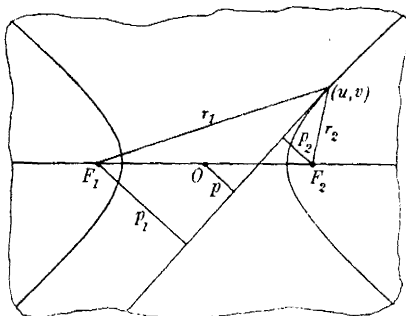


Fig. 60.

§ 35. Brennpunkteigenschaften der Parabel.

Die in Fig. 33 S. 32 dargelegte Parabelkonstruktion ist in
 Fig. 61 mit einigen Ergänzungen reproduziert. Sind u , v die Ko-
 ordinaten des Punktes P der Parabel, so hat der Punkt Q der
 Leitgeraden L die Koordinaten $-\frac{1}{2}p$, v . Da aber der Brennpunkt F
 die Koordinaten $\frac{1}{2}p$, 0 hat, so sind nach (9) S. 9 die Koordi-
 naten des Mittelpunktes M der Strecke
 FQ durch 0 , $\frac{1}{2}v$ gegeben. Die Gerade
 MP , als durch die Punkte $(0, \frac{1}{2}v)$
 und (u, v) laufend, hat die Gleichung:

$$2uy = v(x + u)$$

und ist demnach zufolge (5) S. 42
 die Parabeltangente des Berührungs-
 punktes P .

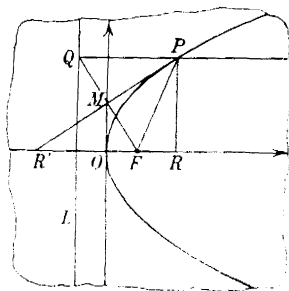


Fig. 61.

Das auf der Leitgeraden L errich-
 tete Lot QP gibt über P verlängert
 den zum Punkte P gehörenden Pa-
 rabeldurchmesser. Bezeichnen wir
 FP wieder als „Brennstrahl“ des Punktes P , so folgt (Fig. 61):
 Die Parabeltangente bildet mit dem Brennstrahl ihres Berührungs-
 punktes und dem zugehörigen Durchmesser gleiche Winkel.¹⁾

Den Punkt M kann man hiernach auch als Fußpunkt des
 Lotes von F auf die Parabeltangente des Punktes P auffassen:
 Die Fußpunkte der Lote vom Brennpunkte F auf die Parabeltan-
 genten bilden die Scheiteltangente (y -Achse), welche demnach an
 Stelle des Kreises K der Ellipse und Hyperbel tritt.

1) Vom Brennpunkte F ausgehende Lichtstrahlen werden an der
 Parabel parallel zu deren Achse reflektiert.

Die sich ergebenden Tangentenkonstruktionen sind wieder einleuchtend. Um in einem gegebenen Parabelpunkte P die Tangente zu zeichnen, fälle man von P das Lot PQ auf die Leitgerade L , ziehe die Gerade QF , welche die Scheiteltangente in M schneide; dann ist MP die Tangente. Um von einem links von der Parabel gelegenen Punkte A aus das Tangentenpaar zu konstruieren, zeichne man um den Mittelpunkt A mit dem Radius AF einen Kreis, der die Leitgerade L in Q und Q' schneide (Fig. 62); die auf L errichteten Lote QP und $Q'P'$ schneiden auf der Parabel die Berührungspunkte P und P' der gesuchten Tangenten aus.

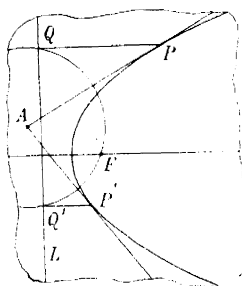


Fig. 62.

Kap. IV. Gemeinsame Gleichungen für die Kurven zweiten Grades.

§ 36. Die Scheiteltgleichung der Kegelschnitte.

Man übe bei der Ellipse eine Parallelverschiebung der Koordinatenachsen in Richtung der Abszissenachse so aus, daß der Scheitelpunkt $(-a, 0)$ der neue Nullpunkt wird; bei der Hyperbel verschiebe man die Achsen entsprechend so, daß der Scheitelpunkt $(a, 0)$ zum Nullpunkte des neuen Koordinatensystems wird. In beiden Fällen haben dann die Achsen zur Kurve eine Lage, wie sie bei der Parabel von vornherein ausgewählt war: *Die y-Achse ist eine Scheiteltangente, welche durch die Kurve von rechts her im Nullpunkte berührt wird.*

Nach (1) S. 5 ist die Beziehung zwischen den alten Koordinaten x, y und den neuen x', y' einfach $x = x' \mp a, y = y'$, wobei das obere Zeichen der Ellipse, das untere der Hyperbel zukommt. Die transformierten Kurvengleichungen werden (unter Fortlassung der Indizes bei x', y'):

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und also:} \quad y^2 = 2 \left(\frac{b^2}{a} \right) x \mp \left(\frac{b^2}{a^2} \right) x^2.$$

Man setzt zur Abkürzung:

$$(1) \quad \frac{b^2}{a} = p, \quad \mp \frac{b^2}{a^2} = q,$$

so daß umgekehrt gilt:

$$(2) \quad a = \frac{p}{\mp q} = \frac{p}{q}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\mp q}} = \frac{p}{\sqrt{q}}.$$

Die Größe $2p$ heißt „*Parameter*“, p selbst „*Halbparameter*“ der Kurve. Da man bei Gebrauch der ursprünglichen Koordinaten und Gleichungen leicht zeigt, daß der Punkt $(\mp e, p)$ auf der Kurve liegt, so kann der Halbparameter p bei der Ellipse und Hyperbel (genau wie bei der Parabel, S. 35) als *Kurvenordinate in einem Brennpunkte* geometrisch gedeutet werden. Mit Benutzung der Abkürzungen (1) folgt: Die gemeinsame „*Scheitelgleichung*“ der Kegelschnitte ist:

$$(3) \quad y^2 = 2px + qx^2,$$

wobei p und q irgend zwei endliche Zahlen sind, die den Bedingungen:

$$(4) \quad p > 0, \quad q \geq -1$$

genügen: für $q < 0$ stellt (3) eine Ellipse dar, und insbesondere für $q = -1$ einen Kreis, für $q = 0$ hat man eine Parabel, für $q > 0$ eine Hyperbel. Läßt man auch noch die Ellipsen mit $b > a$ zu, bei denen also die große Achse auf der ursprünglichen y -Achse liegt, so kommen auch noch alle unterhalb -1 liegenden endlichen Werte q zur Geltung.

Es ist nützlich, sich die Lage der einfach unendlich vielen Kurven mit fest gegebenem Werte $2p$ deutlich zu machen, wie sie von allen Werten $q \geq -1$ (bei den Ellipsen wieder der Voraussetzung $a \geq b$ entsprechend) geliefert werden. Wir nennen dieses System eine „*Kurvenschar*“ und bezeichnen den der Schar angehörenden Kreis des Radius p und des Mittelpunktes $(p, 0)$ mit K . Aus (3) und (4) folgt:

$$(5) \quad 1 + q = \frac{((x-p)^2 + y^2) - p^2}{x^2} \geq 0.$$

Da $((x-p)^2 + y^2)$ das Quadrat der Entfernung des Punktes (x, y) und $(p, 0)$ ist, so ergibt sich aus (5): *Das Innere von K bleibt von der Schar frei: durch jeden vom gemeinsamen Scheitelpunkte O verschiedenen Punkt (x, y) außerhalb K läuft eine und nur eine Kurve der Schar hindurch.*¹⁾ Für jedes solche Paar x, y berechnet sich nämlich aus (5) ein bestimmter, die zweite Ungleichung (4) befriedigender Wert q , der in (3) eingesetzt die Gleichung der durch (x, y) hindurchlaufenden Kurve ergibt.

Die Gestalt der Kurvenschar ist in Fig. 63 angedeutet. Der Kreis K und die der Schar für $q = 0$ angehörende Parabel sind stärker ausgezogen als die Ellipsen und Hyperbeln: die Ellipsen erfüllen den Teil der Ebene zwischen Kreis und Parabel, die Hyperbeln den links von der Parabel gelegenen Teil der Ebene. Die

1) Läßt man auch $a < b$ und damit $q < -1$ zu, so erweitert sich die Kurvenschar, und es läuft alsdann auch durch jeden Innenpunkt von K eine und nur eine Kurve der Schar hindurch.

in Fig. 63 punktierte, zur x -Achse im Abstände p parallele Gerade schneidet auf der einzelnen Kurve die Endpunkte der Ordinaten in den Brennpunkten aus. Indem wir nach Maßgabe der Figuren 31 ff. für die Ellipsen und Hyperbeln die Brennpunkte durch die Bezeichnungen F_1 und F_2 unterscheiden, lesen wir aus Fig. 63 ab: Bei den Ellipsen ist der geometrische Ort der Brennpunkte F_1 die Strecke MN der x -Achse, derjenige der Brenn-

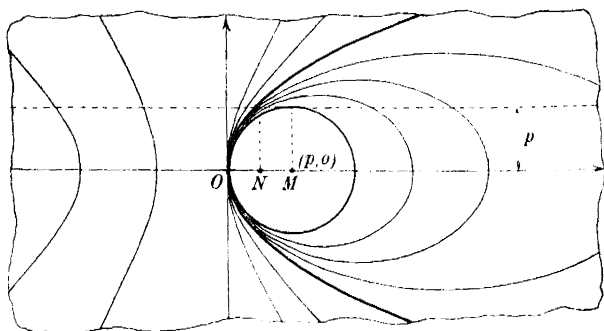


Fig. 63.

punkte F_2 die rechts von M verlaufende x -Achse; bei den Hyperbeln ist der geometrische Ort der Brennpunkte F_2 die Strecke NO der x -Achse, derjenige der Brennpunkte F_1 die negative x -Achse. Die Parabel erscheint als Grenzfall sowohl für die Ellipsen als auch für die Hyperbeln und damit als Übergang $q = 0$ zwischen beiden Kurvenarten; im Grenzfall rückt jeweils der eine Brennpunkt nach dem in Fig. 63 mit N bezeichneten Punkte $(\frac{1}{2}p, 0)$, während der andere Brennpunkt und mit ihm der Kurvenmittelpunkt auf der x -Achse ins Unendliche gewandert ist.¹⁾

§ 37. Brennpunkte und Leitgeraden der Kegelschnitte.

Bei Gebrauch der ursprünglichen Koordinaten war die Tangente der Ellipse bzw. Hyperbel mit dem Berührungspunkt (u, v) oben (S. 42) durch:

$$(1) \quad \frac{xu}{a^2} \pm \frac{yv}{b^2} = 1$$

1) Indem man den S. 38 für die Ellipse eingeführten Begriff des „Scheitelkrümmungskreises“ auf die Parabel und Hyperbel überträgt, wolle man noch den Satz zeigen: Der Kreis K ist gemeinsamer Scheitelkrümmungskreis für alle Kurven der Schar, und zwar auch für die bei $q < -1$ eintretenden Ellipsen. Man zeige auch noch, daß für die letzteren, das Kreisinnere erfüllenden Ellipsen der geometrische Ort der Brennpunkte der Kreis des Radius $\frac{1}{2}p$ und des Mittelpunktes $(\frac{1}{2}p, 0)$ ist.

dargestellt. Ist (u, v) irgendein von O verschiedener endlicher Punkt der Ebene, so nennt man die durch (1) gegebene Gerade wie beim Kreise (S. 23) die „Polare“ des Punktes (u, v) in bezug auf die Kurve: Die Polare eines Brennpunktes insbesondere heißt eine „Leitgerade“ der Kurve.

Wir bevorzugen bei der Ellipse den Brennpunkt $(-e, 0)$, bei der Hyperbel $(e, 0)$, benutzen für den ausgewählten Brennpunkt die Bezeichnung F und für seine Leitgerade L ; letztere ist durch $x = \mp \frac{a^2}{e}$ dargestellt und kann durch die

in Fig. 64 angegebene Konstruktion gewonnen werden. Handelt es sich nämlich z. B. um die Ellipse, so hat die Tangente des Berührungspunktes P der Koordinaten $-e, p$ die Gleichung:

$$-\frac{xe}{a^2} + \frac{yp}{b^2} = 1$$

und schneidet demnach die x -Achse im Punkte R der Koordinaten $-\frac{a^2}{e}, 0$, in

welchem L in der Tat auf der x -Achse senkrecht steht.

Das Verhältnis der Exzentrizität e zur Halbachse a heißt „numerische Exzentrizität“ und werde mit c bezeichnet:

$$(2) \quad \frac{e}{a} = c;$$

c ist eine endliche positive Zahl, die für eine Ellipse im Intervall $0 < c < 1$ liegt und bei einer Hyperbel der Bedingung $c > 1$ genügt. Zur Unterscheidung heißt e „lineare Exzentrizität“.

Der Abstand eines Ellipsenpunktes (x, y) von L werde durch s bezeichnet, sein zu F gehörender Brennstrahl aber durch r ; dann gilt (vgl. die erste Gleichung (1) S. 55):

$$s = x + \frac{a^2}{e}, \quad r = \frac{ex}{a} + a,$$

so daß jeder Ellipsenpunkt die Bedingung:

$$(3) \quad r = cs$$

erfüllt. Erklären wir s und r entsprechend für einen beliebigen Punkt (x, y) der Ebene als Abstand von L bzw. von F , so gilt:

$$s = x + \frac{a^2}{e}, \quad r = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}.$$

Soll für diesen Punkt die Gleichung (3) gelten, so folgt:

$$(x+e)^2 + y^2 = c^2 \left(x + \frac{a^2}{e} \right)^2 = \frac{e^2}{a^2} x^2 + 2ex + a^2.$$

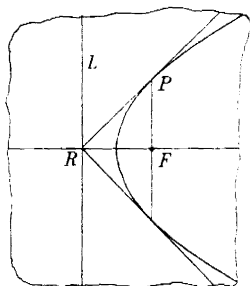


Fig. 64.

woraus sich sofort die Gleichung der Ellipse wieder ergibt, so daß auch *nur* die Punkte der Ellipse die Gleichung (3) erfüllen.

Erklären wir für die Hyperbelpunkte s und r entsprechend, so folgt (vgl. die zweite Gleichung (1) S. 58):

$$s = \operatorname{sgn}(x) \left(x - \frac{a^2}{e} \right), \quad r = \operatorname{sgn}(x) \left(\frac{ex}{a} - a \right),$$

so daß wiederum die Gleichung (3) zutrifft. Umgekehrt gilt hier für einen beliebigen Punkt der Ebene:

$$s = x - \frac{a^2}{e}, \quad r = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

und also führt die Bedingung (3) leicht zur Hyperbelgleichung zurück.

Nehmen wir noch die „Brennpunktserklärung“ $s = r$ der Parabel hinzu, so folgt für die Ellipsen (unter Ausschluß der Kreise), Parabeln und Hyperbeln: *Ist in der Ebene eine Gerade L und ein nicht auf ihr liegender Punkt F gegeben, so ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche der Radiusvektor r von F zum Abstände s von L im konstanten Verhältnis $r:s = c$ steht, ein Kegelschnitt mit F als Brennpunkt und L als zugehöriger Leitgeraden: und zwar liegt eine Ellipse für $0 < c < 1$, eine Parabel für $c = 1$ und eine Hyperbel für $c > 1$ vor.*

§ 38. Die Polargleichung der Kegelschnitte.

Der Brennpunkt F werde als Pol, der von F ausziehende, von der zugehörigen Leitgeraden L abgewandte Teil der x -Achse werde als Polarachse gewählt. Im Falle der Ellipse bzw. Hyperbel ist der Abstand des Poles F von der Leitlinie L gleich:

$$\pm \left(\frac{a^2}{e} - c \right) = \pm \frac{a^2 - e^2}{e} = \frac{b^2}{e} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{a}{e} = \frac{p}{c},$$

wo p der Halbparameter und c die numerische Exzentrizität ist. Die Angabe gilt auch für die Parabel, wo $c = 1$ ist.

Ist (r, ϑ) ein Punkt der Ellipse oder der Parabel oder des zwischen F und L hindurchziehenden Zweiges der Hyperbel, so gilt:

$$\frac{r}{c} = s = \frac{p}{e} + r \cos \vartheta$$

und also:

$$(1) \quad r = \frac{p}{1 - c \cos \vartheta}.$$

So hat man z. B. für den Hyperbelpunkt P in Fig. 65:

$$FP = r, \quad \angle AFP = \vartheta, \quad s = R\tilde{Q} + P\tilde{Q} = \frac{p}{c} + r \cos \vartheta.$$

Im Falle der Ellipse und Parabel ist ϑ im Intervall $0^\circ \leq \vartheta < 360^\circ$ variabel und liefert für das einzelne ϑ das zugehörige r in der Gestalt (1), wobei für die Parabel der Anfangswert $\vartheta = 0$, wie es sein muß, $r = \infty$ ergibt. Bei der Hyperbel ist ϑ im Intervall:

$$(2) \quad \frac{w}{2} \leq \vartheta \leq 360^\circ - \frac{w}{2}$$

variabel, und es wird in (1) nur erst der eine Hyperbelzweig dargestellt; w bedeutet hierbei den „Asymptotenwinkel“ (vgl. (1) S. 44), und man hat für die beiden Asymptotenrichtungen $\vartheta = \frac{w}{2}$ und $\vartheta = 360^\circ - \frac{w}{2}$ wieder $r = \infty$.

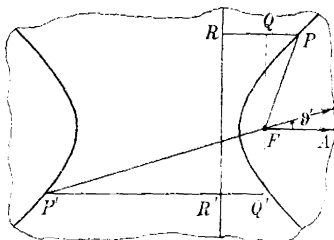


Fig. 65.

Ist im Falle der Hyperbel ϑ' irgendeine nicht dem Intervall (2) angehörende Amplitude, so verlängere man den von der Polarachse verschiedenen Schenkel von ϑ' rückwärts über F bis zum Punkte P' des anderen Hyperbelzweiges und bezeichne den Radiusvektor FP' mit r' . Dann gilt (Fig. 65):

$$\frac{r'}{c} = s = \overline{P'Q'} - \overline{R'Q'} = r' \cos \vartheta' - \frac{p}{c}$$

und also:

$$-r' = \frac{p}{1 - \cos \vartheta'}.$$

Für die dem Intervall $-\frac{w}{2} < \vartheta < +\frac{w}{2}$ angehörenden Amplituden ϑ wird der von (1) gelieferte Wert r negativ; trägt man indessen den Absolutwert $r' = r = -r$ auf der Verlängerung des beweglichen Schenkels von ϑ über F hinaus vom Pole F aus ab, so gewinnt man in $(r', \vartheta + 180^\circ)$ die Punkte des zweiten Hyperbelzweiges. Unter Zulassung dieser Deutung für etwa aus (1) zu berechnende negative Werte r haben wir in dieser Gleichung (1) die gemeinsame „Polargleichung“ der Kegelschnitte mit Einschluß der für $c = 0$ eintretenden Kreise gewonnen.

§ 39. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades und ihr Verhalten bei Koordinatentransformationen.

Unter Benutzung rechtwinkliger Koordinaten schreiben wir die „allgemeine Gleichung zweiten Grades“:

$$(1) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

wobei zur Vereinfachung der aufzustellenden Formeln der halbe Koeffizient von xy mit B bezeichnet ist und auch in die linearen

Glieder Faktoren 2 aufgenommen wurden. Damit die Gleichung (1) wirklich eine Kurve zweiten Grades darstellt, ist jedenfalls zu fordern, daß die drei Koeffizienten A, B, C der Glieder zweiten Grades nicht zugleich verschwinden.

Man übe die durch $x = x' + a, y = y' + b$ gegebene „Parallelverschiebung“ der Koordinatenachsen aus und bringe die auf x', y' umgerechnete Gleichung (1) wieder in die geordnete Form $A'x'^2 + 2B'x'y' + \dots = 0$. Die Rechnung zeigt, daß sich die neuen Koeffizienten A', B', \dots in den alten A, B, \dots und den a, b so darstellen:

$$(2) \quad \begin{cases} A' = A, & B' = B, & C' = C, \\ D' = Aa + Bb + D, & E' = Ba + Cb + E, \\ F' = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F. \end{cases}$$

Man übe zweitens auf die ursprünglichen Achsen die durch:

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

gegebene „Drehung“ der Koordinatenachsen um O aus und bringe auch hier die auf die x', y' umgerechnete Gleichung (1) wieder auf die Gestalt $A'x'^2 + 2B'x'y' + \dots = 0$. Jetzt stellen sich die neuen Koeffizienten in den alten und dem Winkel α so dar:

$$(3) \quad \begin{cases} A' = A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha, \\ B' = -A \cos \alpha \sin \alpha + B (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + C \sin \alpha \cos \alpha, \\ C' = A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha, \\ D' = D \cos \alpha + E \sin \alpha, \quad E' = -D \sin \alpha + E \cos \alpha, \quad F' = F. \end{cases}$$

Aus den drei ersten Gleichungen (3) leitet man leicht die folgenden ab:

$$\begin{aligned} A' + C' &= A + C, \\ A' - C' &= (A - C) \cos 2\alpha + 2B \sin 2\alpha, \\ -2B' &= (A - C) \sin 2\alpha - 2B \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Durch Quadrieren und Addieren der zwei letzten Gleichungen folgt:

$$(A' - C')^2 + 4B'^2 = (A - C)^2 + 4B^2.$$

Zieht man hiervon die Gleichung $(A' + C')^2 = (A + C)^2$ ab und teilt die Differenz durch 4, so ergibt sich:

$$(4) \quad B'^2 - A'C' = B^2 - AC.$$

Da auch für die in (2) gegebenen A', B', C' die Gleichung (4) gilt und übrigens jede Transformation eines unserer rechtwink-

ligen Koordinatensysteme¹⁾ wieder in ein solches aus einer Parallelverschiebung und einer Drehung um den Nullpunkt zusammengesetzt werden kann, so folgt: Bei Übergang zu einem neuen rechtwinkligen System besteht zwischen den neuen Koeffizienten A', B', C' und den alten A, B, C stets die Gleichung (4); der Wert:

$$(5) \quad J = B^2 - AC$$

bleibt demnach bei Ausführung der Transformation unverändertlich oder „invariant“ und soll deshalb als „Invariante“ der Gleichung (1) und der durch sie dargestellten Kurve benannt werden.

§ 40. Die Kurven zweiten Grades mit nicht-verschwindender Invariante.

Ist die Invariante J der Gleichung (1) S. 65 nicht gleich 0, so gibt es ein und nur ein solches Zahlenpaar a, b , daß die Parallelverschiebung $x = x' + a$, $y = y' + b$ eine transformierte Gleichung mit zugleich verschwindenden Koeffizienten D' und E' der linearen Glieder ergibt. Damit nämlich $D' = 0$, $E' = 0$ gilt, müssen zufolge (2) S. 66 die a, b den Gleichungen:

$$Aa + Bb = -D, \quad Ba + Cb = -E$$

genügen, deren Auflösung die eindeutig bestimmten, endlichen Werte liefert:

$$(1) \quad a = \frac{CD - BE}{J}, \quad b = \frac{AE - BD}{J}.$$

Da man die letzte Gleichung (2) S. 66 in der Gestalt:

$F' = a(Aa + Bb + D) + b(Ba + Cb + E) + Da + Eb + F$ schreiben kann, so folgt für die in (1) vorliegenden a, b :

$$F' = Da + Eb + F = \frac{D(CD - BE)}{J} + \frac{E(AE - BD)}{J} + F, \\ -J \cdot F' = D(BE - CD) + E(BD - AE) + F(AC - B^2).$$

Der hier rechts auftretende Ausdruck heißt die „Diskriminante“ der Gleichung (1) S. 65 und werde mit Δ bezeichnet:

$$(2) \quad \Delta = ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2.$$

Die ausgeübte Parallelverschiebung liefert, wenn die neuen Koordinaten gleich wieder x, y genannt werden, als transformierte Gleichung:

$$(3) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \frac{J}{J}.$$

1) mit der S. 2 gegebene Vorschrift über die Anordnung der positiven Achsenrichtungen.

Dieser Gleichung genügt mit dem Punkte (x, y) stets auch der Punkt $(-x, -y)$. Es folgt: *Der neue Nullpunkt und also der Punkt (a, b) im alten Koordinatensystem ist ein „Mittelpunkt“ der dargestellten Kurve, und zwar¹⁾ der einzige Mittelpunkt derselben.*

Ist $A = C$ und $B = 0$, so gilt voraussetzungsgemäß $A \neq 0$, und wir haben die Gleichung:

$$(4) \quad x^2 + y^2 = \frac{A}{J}.$$

Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es einen und nur einen endlichen oder unendlich großen Wert $\operatorname{tg} 2\alpha$, für welchen:

$$2B' = -(A - C) \sin 2\alpha + 2B \cos 2\alpha = 0$$

gilt, nämlich:

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}.$$

Hieraus berechnen sich vier untereinander um 90° differierende Winkel α , so daß, abgesehen von Vertauschungen der Koordinaten und Änderungen der positiven Achsenrichtungen, *ein und nur ein Achsenkreuz* mit dem Mittelpunkte als Nullpunkt existiert, für welches in der transformierten Gleichung der Koeffizient B' verschwindet. Wir wählen einen unter den vier Drehungswinkeln α , bezeichnen die neuen Achsen als „Hauptachsen“ der Kurve und gewinnen als transformierte Gleichung (wieder in x, y geschrieben):

$$(6) \quad A'x^2 + C'y^2 = \frac{A}{J},$$

da zufolge der letzten Gleichung (3) S. 66 bei der ausgeübten Drehung das Absolutglied der Gleichung zweiten Grades unverändert bleibt und die Koeffizienten der linearen Glieder nach wie vor verschwinden. Für die Koeffizienten A', C' gilt nach den Rechnungen von S. 66:

$$A'C' = -J, \quad (A' - C')^2 = (A - C)^2 + 4B^2.$$

Da $J \neq 0$ ist und der Fall $A = C, B = 0$ nicht vorliegen sollte, so ist keine der Größen A', C' null, und sie sind voneinander verschieden.

Es sei nun erstlich die Diskriminante $A \neq 0$. Bei der Gleichung (6) unterscheiden wir vier Fälle je nach dem Vorzeichen der von 0 verschiedenen Werte der Quotienten $\frac{A}{A'J}, \frac{A}{C'J}$ und schreiben, um die Fälle durch Formeln unterscheiden zu können:

$$(7) \quad \frac{A}{A'J} = -\frac{A}{A'^2 C'} = \pm a^2, \quad \frac{A}{C'J} = -\frac{A}{A' C'^2} = \pm b^2.$$

1) wie die weitere Entwicklung zeigt oder auch leicht aus der eindeutigen Bestimmtheit der in (1) berechneten Werte a, b gefolgert werden kann.

Die Gleichung (6) nimmt entsprechend folgende vier Gestalten an, denen wir jeweils eine durch Multiplikation der Gleichungen (7) mit Rücksicht auf $A'C' = -J$ leicht herstellbare Darstellung von J anfügen:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, & J &= -\frac{\Delta^2}{a^2 b^2 J^2}, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, & J &= +\frac{\Delta^2}{a^2 b^2 J^2}, \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, & J &= +\frac{\Delta^2}{a^2 b^2 J^2}, \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, & J &= -\frac{\Delta^2}{a^2 b^2 J^2}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist durch kein reelles Wertepaar x, y zu befriedigen. Um doch noch die „Sprechweise“ beizubehalten, daß sie eine Kurve zweiten Grades darstelle, sagt man in diesem Falle, die Kurve sei *imaginär*. Die Diskussion der Gleichung (4), die bei $A = C, B = 0$ eintritt und zufolge (5) und (2) S. 67 auch geschrieben werden kann:

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2 + E^2 - AF}{A^2},$$

ist leicht erledigt. Zusammenfassend haben wir den Satz: *Sind die Invariante J und die Diskriminante Δ von 0 verschieden, so stellt die Gleichung (1) S. 65 stets eine Hyperbel dar, falls $J > 0$ ist; gilt indessen $J < 0$, ohne daß der besondere Fall $A = C, B = 0$ zutrifft, so hat man eine von einem Kreise verschiedene Ellipse oder eine imaginäre Kurve zweiten Grades, je nachdem $(A + C)\Delta < 0$ oder > 0 ist. Gilt endlich $A = C, B = 0$, so hat man einen Kreis für $D^2 + E^2 - AF > 0$ und eine imaginäre Kurve (Kreis mit imaginärem Radius) für $D^2 + E^2 - AF < 0$. Das Kriterium des Vorzeichens von $(A + C)\Delta$ ergibt sich leicht aus den Gleichungen (7) mit Rücksicht auf die S. 66 bewiesene Gleichung $A' + C' = A + C$.*

Ist zweitens die Diskriminante $\Delta = 0$, so ordnen wir die bei $A = C, B = 0$ eintretende Gleichung (4) der allgemeineren Gleichung (6) mit $J < 0$ unter. Die Gleichung (6) aber kleiden wir für den vorliegenden Fall $\Delta = 0$ durch Multiplikation mit dem von 0 verschiedenen Faktor A' in die Gestalt:

$$A'^2 x^2 - J y^2 = (A'x + y\sqrt{J})(A'x - y\sqrt{J}) = 0$$

und lesen hieraus den Satz ab: *Ist die Invariante $J \neq 0$, während die Diskriminante Δ verschwindet, so stellt die Gleichung (1) S. 65 zwei einander in einem endlichen Punkte schneidende Gerade dar, falls $J > 0$ ist; gilt hingegen $J < 0$, so stellt die Glei-*

chung (1) S. 65 nur einen einzigen Punkt dar. Doch sagt man im Anschluß an die letzte Gleichung, die Kurve zerfalle in zwei „konjugiert imaginäre Gerade“ mit einem „reellen Schnittpunkte“. In der Tat ist ja für $J < 0$ der Nullpunkt des neuen Systems, dem Punkte (a, b) im ursprünglichen System entsprechend, der einzige reelle Punkt, welcher die letzte Gleichung befriedigt.

§ 41. Die Kurve zweiten Grades mit verschwindender Invariante.

Ist $J = B^2 - AC = 0$, so sind die Größen A, B, C entweder alle von 0 verschieden oder es verschwinden B und eine der Größen A, C . Jedenfalls ist also einer der Koeffizienten A, C nicht gleich 0; es sei etwa A von 0 verschieden und > 0 .¹⁾ Aus:

$$A(A + C) = A^2 + B^2 > 0$$

folgt, daß dann auch $A + C > 0$ gilt. Für die Diskriminante Δ ergibt sich aus (2) S. 67 mit Rücksicht auf $AC = B^2$:

$$\Delta = -A \cdot E^2 + 2B \cdot DE - C \cdot D^2,$$

also durch Multiplikation mit $-A$ und Ersatz von AC durch B^2 im letzten Gliede:

$$(1) \quad -A\Delta = (AE - BD)^2.$$

Ist nun erstlich die Diskriminante $\Delta \neq 0$ und also auch $AE - BD \neq 0$, so setzen wir zur Abkürzung:

$$\operatorname{sgn}(AE - BD) = \varepsilon$$

und folgern aus (1):

$$(2) \quad AE - BD = \varepsilon \sqrt{-A\Delta},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist.

Man drehe jetzt das Koordinatenkreuz um den durch:

$$\sin \alpha = -\varepsilon \sqrt{\frac{A}{A+C}}, \quad \cos \alpha = \varepsilon \frac{B}{A} \sqrt{\frac{A}{A+C}}$$

mit positiv genommener Wurzel gegebenen Winkel α ²⁾ und findet für die transformierte Gleichung:

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = A + C, \quad D' = -\sqrt{\frac{-\Delta}{A+C}}, \quad F' = F.$$

1) Ist $A = 0, C \neq 0$, so gehe man vermöge der „Drehung“ $x = -y', y = x'$ der Achsen zu einer Gleichung mit $A' \neq 0$. Ist $A < 0$, so genügt der Zusatz des Faktors -1 zur Gleichung (1) S. 65, um die Voraussetzung des Textes zu erfüllen.

2) Man überzeuge sich, daß die Summe der Quadrate der beiden in den letzten Gleichungen rechts stehenden „reellen“ Zahlen gleich 1 ist.

Die erste und fünfte Gleichung folgen aus (3) S. 66; die zweite und dritte folgen aus der Invarianz von $(B^2 - AC)$ und $(A + C)$; endlich ist die vierte Gleichung, in der die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, mit Benutzung von (2) leicht aus dem unter (3) S. 66 für D' gegebenen Ausdruck zu entnehmen. Die transformierte Gleichung (sogleich wieder in x, y geschrieben) hat hiernach die Gestalt:

$$(3) \quad (A + C)y^2 - 2\sqrt{\frac{-A}{A+C}}x + 2E'y + F = 0.$$

Zur Abkürzung setze man:

$$-\frac{E'}{A+C} = b, \quad \frac{1}{A+C}\sqrt{\frac{-A}{A+C}} = p,$$

wobei $p > 0$ gilt; weiter berechne man a aus:

$$b^2 - \frac{F}{A+C} = -2ap.$$

Die durch $(A + C)$ geteilte Gleichung (3) nimmt die Form an:

$$(y - b)^2 = 2p(x - a)$$

und geht durch die Parallelverschiebung $x = x' + a, y = y' + b$ in

$$y'^2 = 2px'$$

über: Die Gleichung (1) S. 65 mit verschwindender Invariante J , aber nicht-verschwindender Diskriminante Δ stellt eine Parabel dar.

Ist zweitens $\Delta = 0$, so multipliziere man die Gleichung (1) S. 65 mit der positiven Zahl A , ersetze im dritten Gliede AC durch B^2 und im fünften Gliede das Produkt AE durch das (wegen $\Delta = 0$) ihm gleiche Produkt BD . Die Gleichung (1) S. 65 schreibt sich dann:

$$(Ax + By)^2 + 2D(Ax + By) + AF = 0,$$

$$(Ax + By + D)^2 - (D^2 - AF) = 0,$$

so daß ihre linke Seite in das Produkt zweier linearer Faktoren spaltbar ist:

$$(Ax + By + D + \sqrt{D^2 - AF})(Ax + By + D - \sqrt{D^2 - AF}) = 0.$$

Ist $J = 0$ und $\Delta = 0$, so stellt die Gleichung (1) S. 65 zwei parallele Gerade oder eine „doppelt gezählte“ Gerade (zwei zusammenfallende Gerade) dar, oder sie ist durch keinen reellen Punkt zu befriedigen, je nachdem ($A \neq 0$ vorausgesetzt) $D^2 - AF > 0$ oder $= 0$ oder < 0 ist. Im letzten Falle sagt man auch, die Kurve zerfalle in zwei parallele „imaginäre Gerade“.

Kap. V. Einige bei einfachen Mechanismen auftretende Kurven.

§ 42. Begriff der Gleitkurven und Beispiel der Ellipsen.

Eine gerade Strecke AB soll sich in der Ebene so bewegen, daß ihre Endpunkte A, B an zwei fest gegebenen Kurven entlang gleiten. Ein beliebiger Punkt P der Strecke beschreibt dabei eine Kurve, welche man als „Gleitkurve“ bezeichnet; die beiden gegebenen Kurven, längs deren die Punkte A, B wandern, mögen die „Bahnkurven“ heißen.

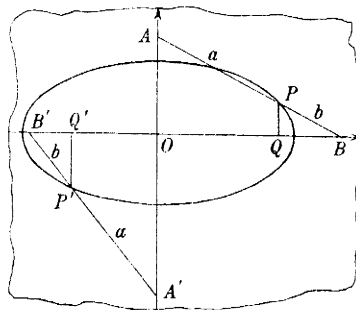


Fig. 66.

Der einfachste Fall ist der, daß die beiden Bahnkurven zwei einander senkrecht schneidende Gerade sind. Wird die Strecke AB durch den Punkt P , welcher die Gleitkurve beschreiben soll, in die beiden

Teilstrecken $AP = a$, $BP = b$ zerlegt, so gilt der durch Fig. 66 näher erläuterte Satz: Die durch den Punkt P beschriebene Gleitkurve ist die Ellipse der Hauptachsen $2a$ und $2b$, die auf den beiden Bahngeraden gelegen sind. Wählt man nämlich die beiden Bahngeraden zu Koordinatenachsen, so folgt aus Fig. 66, in welcher zwei Lagen AB und $A'B'$ der gleitenden Geraden fixiert sind, für die Koordinaten x, y des Punktes P :

$$OQ = |x|, \quad QB = +\sqrt{b^2 - y^2}, \quad |x| : \sqrt{b^2 - y^2} = a : b;$$

aus dieser Proportion aber entnimmt man für x, y sofort die Gleichung der fraglichen Ellipse.

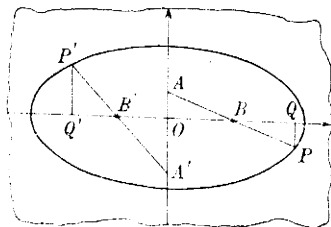


Fig. 67.

Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangt man, wenn der Punkt P auf der Verlängerung der Strecke AB etwa über B hinaus gelegen ist. Setzt man auch jetzt $AP = a$, $BP = b$, so beschreibt der Punkt P wieder die Ellipse der Hauptachsen $2a$ und $2b$, die auf den Bahngeraden gelegen

sind. Aus Fig. 67 entnimmt man nämlich:

$$BQ = +\sqrt{b^2 - y^2}, \quad OB = |x| - \sqrt{b^2 - y^2},$$

worauf die Proportion $OB : BQ = AB : BP$ oder

$$(|x| - \sqrt{b^2 - y^2}) : \sqrt{b^2 - y^2} = (a - b) : b$$

erneut zur Gleichung der Ellipse zurückführt.

Auf die abgeleiteten Sätze gründet sich die Konstruktion der bekannten „Ellipsenzirkel“ oder „Ellipsographen“.

§ 43. Gleitkurven vierten Grades beim Schubkurbelmechanismus.

Der Endpunkt A der Strecke AB gleite auf einem Kreise, der Endpunkt B auf einer durch den Kreismittelpunkt ziehenden Geraden. Der Radius des Kreises sei gleich a ; die gleitende Strecke AB werde durch den Punkt P , der die zu untersuchende Gleitkurve beschreiben soll, in die Teilstrecken $AP = b$ und $BP = c$ geteilt.

Die hier in Betracht kommende Bewegung wird durch den „Schubkurbelmechanismus“ der Maschinentechnik verwirklicht. Ist

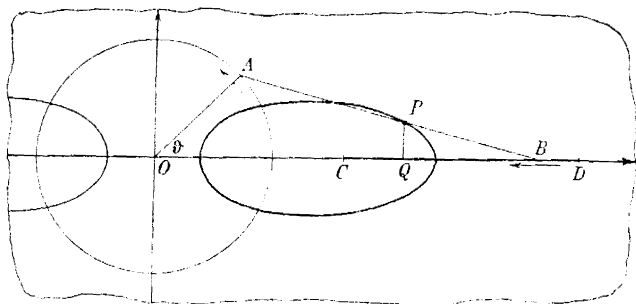


Fig. 68.

erstlich die Länge $(b + c)$ der Strecke AB größer als der Radius a , so liegen die in Fig. 68 skizzierten Verhältnisse vor. Die „Kurbel“ OA der Länge $OA = a$ denke man sich als eine um O in der Ebene drehbare Stange; im Endpunkte A derselben ist mittels eines Gelenkes die „Schubstange“ AB der Länge $AB = b + c$ angehängt, deren zweiter Endpunkt B , der „Gleitpunkt“ (das „Gleitstück“) längs der Geraden OD verschiebbar ist. Wächst der „Kurbelwinkel“ $\varphi = \angle AOB$ von 0° bis 360° , so beschreibt der Gleitpunkt B die stark ausgezogene Strecke DC der Bahngeraden von D bis C und zurück. Die vom Punkte P beschriebene Gleitkurve hat, wie Fig. 68 zeigt, eine ovale Gestalt und hat die Bahngerade zur Symmetrielinie.

Den Fall $b + c < a$ erläutert Fig. 69. Hier gleitet der Punkt A nur längs des mit EF bezeichneten Kreisbogens, der zur Bahngeraden symmetrisch ist und der Sehne $EF = 2(b + c)$ entspricht;

der andere Endpunkt B der gleitenden Strecke ist in dem wieder durch CD bezeichneten Intervall der Bahngeraden beweglich. Die vom Punkte P beschriebene Gleitkurve hat (Fig. 69) eine sichelförmige Gestalt und wird wieder durch die Bahngerade in zwei symmetrische Hälften zerlegt.

Um die vom Punkte P beschriebene Gleitkurve analytisch zu untersuchen, wählen wir den Kreismittelpunkt O zum Nullpunkt

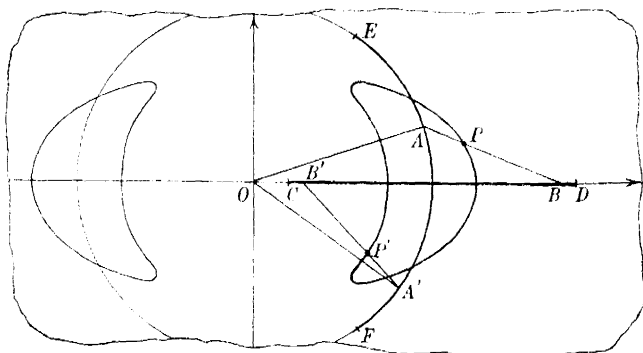


Fig. 69.

und die Bahngerade OD zur positiven x -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, vorübergehend auch O als Pol und OD als Achse für Polarkoordinaten. Der Punkt A habe die Polarkoordinaten a, ϑ und also die rechtwinkligen $a \cos \vartheta$ und $a \sin \vartheta$. Der Punkt B liegt auf der x -Achse und habe die Abszisse x_0 ; da $AB = b + c$ gilt, so ist nach (2) S. 7:

$$(1) \quad \begin{aligned} (x_0 - a \cos \vartheta)^2 + a^2 \sin^2 \vartheta &= (b + c)^2, \\ x_0 &= a \cos \vartheta \pm \sqrt{(b + c)^2 - a^2 \sin^2 \vartheta}. \end{aligned}$$

Der Punkt P der Koordinaten x, y teilt die Strecke AB im Verhältnis $b : c$, so daß zufolge (8) S. 9:

$$(2) \quad x = \frac{b x_0 + a c \cos \vartheta}{b + c}, \quad y = \frac{a c \sin \vartheta}{b + c}$$

gilt. Trägt man den in (1) gegebenen Wert x_0 in die erste dieser Gleichungen ein, so folgt:

$$(b + c)x = a(b + c) \cos \vartheta \pm b \sqrt{(b + c)^2 - a^2 \sin^2 \vartheta}$$

und also unter wiederholter Benutzung der zweiten Gleichung (2):

$$(3) \quad \begin{aligned} cx \mp b \sqrt{c^2 - y^2} &= ac \cos \vartheta, \\ (cx \mp b \sqrt{c^2 - y^2})^2 &= a^2 c^2 - (b + c)^2 y^2. \end{aligned}$$

Isoliert man nach Ausrechnung des Quadrats linker Hand das einzige noch auftretende irrationale Glied auf der einen Seite der Gleichung und quadriert nochmals, so entsteht eine durchweg rationale Gleichung vierten Grades in x und y , die übrigens nur die Quadrate der Koordinaten enthält.

Will man die Gleitkurve auf Grund ihrer Gleichung diskutieren, so setze man die letztere in die Gestalt¹⁾:

$$(4) \quad cx = \pm b \sqrt{c^2 - y^2} \pm \sqrt{a^2 c^2 - (b+c)^2 y^2}.$$

Soll x reell ausfallen, so muß, je nachdem $b+c > a$ (Fig. 68) oder $< a$ (Fig. 69) ist, y den Ungleichungen:

$$(5) \quad -\frac{ac}{b+c} \leq y \leq +\frac{ac}{b+c} \quad \text{oder} \quad -c \leq y \leq +c$$

genügen, und man erhält für jedes y im Innern des Intervalls vier paarweise entgegengesetzte Werte von x . Für die Gleichheitszeichen in (5) ergeben sich, wie man leicht erkennt, in Figg. 68 und 69 die höchsten und tiefsten Punkte der Gleitkurven. *Die betrachtete Kurve vierten Grades besteht aus zwei bezüglich der y -Achse einander symmetrischen geschlossenen „Kurvenzüge“, deren jeder die x -Achse als Symmetrielinie hat; der linksliegende Kurvenzug ist in den Figuren etwas feiner ausgezogen. Der Kurbelmechanismus liefert bei der gewählten Anordnung²⁾ den rechtsliegenden Kurvenzug als die vom Punkte P beschriebene Gleitkurve.*

In dem bisher ausgeschlossenen Übergangsfalle $b+c = a$ setze man die Gleichung (4) in die Gestalt³⁾:

$$(6) \quad \pm cx = \pm b \sqrt{c^2 - y^2} + (b+c) \sqrt{c^2 - y^2}.$$

Hieraus berechnet man leicht:

$$(7) \quad x^2 + y^2 = c^2 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{(2b+c)^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1,$$

je nachdem in (6) rechter Hand im ersten Gliede das untere oder obere Zeichen gilt. *Im Falle $b+c = a$ zerfällt die Kurve vierten Grades in eine Ellipse und einen die letztere in den Scheitelpunkten der kleinen Achse berührenden Kreis.* Geometrisch ist dies Ergebnis einleuchtend: Verlängert man nämlich AB über A hinaus bis

1) Rechter Hand kommen alle vier Zeichenkombinationen zur Geltung.

2) Natürlich gelangt man zum anderen Kurvenzuge, wenn man durch Umlagerung des Mechanismus den Gleitpunkt auf die negative x -Achse verlegt. Man beachte, daß die analytische Rechnung für beide Anordnungen gilt, insofern über das Vorzeichen der mit x_0 bezeichneten Koordinate des Punktes B keine besondere Voraussetzung gemacht wurde.

3) Es sind wieder alle vier Zeichenkombinationen zuzulassen.

zum Punkte G der y -Achse, so ist die Verlängerung $AG = b + c = a$, und die Strecke BG vollführt die in § 42 betrachtete Gleitbewegung, bei welcher der Punkt P eine Ellipse beschreibt. Hinzu kommt für den Fall der Koinzidenz der Schubstange mit der Kurbel noch eine einfache Drehung um O , bei der B auf der Bahngeraden im Punkte O festliegt und A den Bahnkreis beschreibt. Diese Bewegung liefert den Kreis (7).

§ 44. Gleitkurven sechsten Grades beim Kurbelmechanismus.

Die Endpunkte der Strecke AB sollen sich jetzt beide auf Kreisen bewegen, die nicht konzentrisch seien. Diese Bahnkreise mögen die Mittelpunkte O und O' und die Radien $OA = a$, $O'B = b$

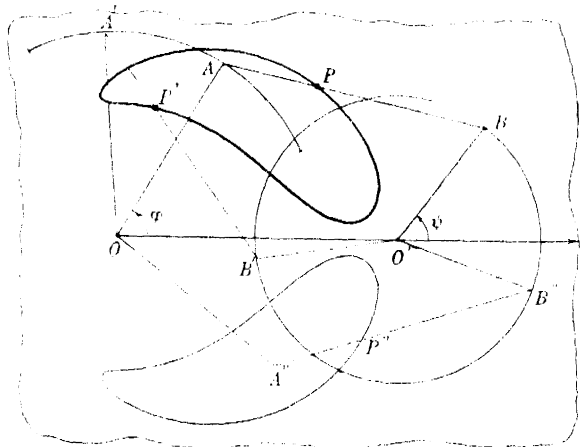


Fig. 70.

haben. Durch den Punkt P werde die Strecke AB in die Teilstrecken $AP = c$, $BP = d$ geteilt.

Die hier vorliegende Bewegung der Strecke AB ist im „Kurbelmechanismus“ verwirklicht. Wir denken die „Kurbeln“ OA und $O'B$ um O und O' drehbar und hängen in den Endpunkten A und B die als „Koppel“ bezeichnete Strecke AB mit Gelenken ein.¹⁾ Der Kurbelmechanismus hat, seitdem er in dem bekannten *Wattschen* Parallelogramm zum erstenmale auftrat, in der Maschinentechnik

1) Modelle solcher Mechanismen kann man sich leicht aus je drei Pappstreifen herstellen, die man mit Stecknadeln bei A und B in Gelenken verbindet und bei O und O' auf dem Reißbrett fixiert. Mit solchen Modellen sind die in Fig. 70 ff. angegebenen Kurven gezeichnet.

die vielfältigste Verwendung gefunden. Zu Ehren von *Watt* nennt man die von einem Punkte *P* der Koppel beschriebene Kurve auch eine „*Wattsche Kurve*“.

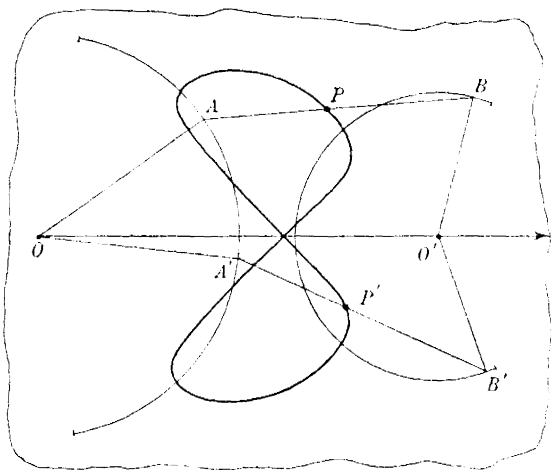


Fig. 71.

In Fig. 70ff. sind einige Gleitkurven dieser Art gezeichnet, aus denen die Verschiedenartigkeit ihrer Gestalten hervorgeht. Die Bahnkreise sind

in den Figuren 70 bis 72 inso-
weit angegeben,
als sie von den
Punkten *A* und
B tatsächlich be-
schrieben wer-
den. Im Falle
der Fig. 70 be-
steht die ge-
samte Wattsche
Kurve aus zwei
getrennten Kur-
venzügen; der

Mechanismus
beschreibt (im
Gegensatz zu

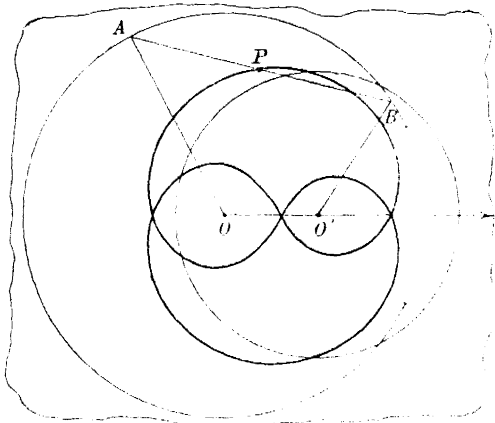


Fig. 72.

den in Figg. 71 und 72 vorliegenden Verhältnissen) bei stetiger Durchlaufung seiner Lagen nur erst den einen in der Figur stärker hervorgehobenen Kurvenzug und muß, wenn man den anderen

Zug gewinnen will, unter vorübergehender Lösung eines Gelenkes nach unten verlegt werden (s. die Anordnung $OA''B''O'$ in Fig. 70).

Zur analytischen Behandlung der vorliegenden Gleitkurve führe man ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit O als Nullpunkt und OO' als positiver x -Achse ein, in welchem P die Koordinaten x, y habe¹⁾. Daneben gebrauchen wir vorübergehend ein zweites System mit O' als Nullpunkt und ein drittes bewegliches System mit A als Nullpunkt, wobei die Achsen dieser beiden Systeme denen des ersten parallel und gleichgerichtet sein sollen. Auch die drei zugehörigen Systeme von Polarkoordinaten ziehen wir heran; dabei soll der Pol des zu „einem rechtwinkligen System gehörenden“ Polarkoordinatensystems der Nullpunkt des rechtwinkligen Systems sein, während die Polarachse mit der positiven x -Achse zusammenfalle ((1) S. 4).

Die Amplitude von A im ersten System heiße φ , diejenige von B im zweiten System sei ψ (in Fig. 70 angegeben), und endlich werde die gemeinsame Amplitude von P und B im dritten System χ genannt. Da A im ersten System die rechtwinkligen Koordinaten $a \cos \varphi, a \sin \varphi$ hat, dem Punkte P (mit den Koordinaten x, y im ersten System) im Systeme des Nullpunktes A aber die rechtwinkligen Koordinaten $c \cos \chi, c \sin \chi$ zukommen, so folgt aus den Formeln (1) S. 5 für die Parallelverschiebung der Achsen:

$$(1) \quad a \cos \varphi = x - c \cos \chi, \quad a \sin \varphi = y - c \sin \chi.$$

Nennt man die Entfernung OO' kurz e , so lassen sich die rechtwinkligen Koordinaten von B im ersten Systeme wieder mit Benutzung von (1) S. 5 in die Gestalt $e + b \cos \psi, b \sin \psi$ kleiden. Wiederholen wir demnach die soeben für P ausgeführte Überlegung für den Punkt B , dessen rechtwinklige Koordinaten im dritten System $(c + d) \cos \chi, (c + d) \sin \chi$ sind, so folgt:

$$a \cos \varphi = e + b \cos \psi - (c + d) \cos \chi,$$

$$a \sin \varphi = b \sin \psi - (c + d) \sin \chi$$

und also durch Subtraktion der Gleichungen (1) von diesen Gleichungen:

$$(2) \quad x - e + d \cos \chi = b \cos \psi, \quad y + d \sin \chi = b \sin \psi.$$

Aus den vier Gleichungen (1) und (2) entsteht durch Elimination der Winkel φ, ψ, χ die für x, y gültige Gleichung der Gleitkurve. Zur Abkürzung der Gleichungen schreibe man:

1) Man mache sich die folgenden Angaben etwa an Fig. 70 anschaulich; übrigens ist die Entwicklung so angelegt, daß sie in jedem Falle gültig ist.

$$\frac{1}{2c}(x^2 + y^2 - a^2 + c^2) = F(x, y),$$

$$\frac{1}{2d}((x - e)^2 + y^2 - b^2 + d^2) = G(x, y),$$

so daß F und G zwei Ausdrücke zweiten Grades in x und y sind. Durch Quadrieren und Addition der Gleichungen (1) und sodann der Gleichungen (2) folgt:

$$x \cos \chi + y \sin \chi = F, \quad e \cos \chi - x \cos \chi - y \sin \chi = G$$

und also weiter:

$$ey \cos \chi = y(F + G), \quad ey \sin \chi = -(x - e)F - xG.$$

Die Elimination von χ liefert endlich:

$$(3) \quad y^2(F + G)^2 + ((x - e)F + xG)^2 - e^2y^2 = 0$$

oder in etwas anderer Gestalt:

$$(4) \quad (x^2 + y^2)(F + G)^2 - 2exF(F + G) + e^2(F^2 - y^2) = 0$$

eine Gleichung, die in x, y vom sechsten Grade ist und y nur in geraden Potenzen enthält. Damit erhalten wir das Ergebnis: *Die als „Wattsche Kurve“ bezeichnete, vom Punkte P des Kurbelmechanismus gelieferte Gleitkurve ist vom sechsten Grade und hat die Verbindungsgerade der beiden Kreismittelpunkte O und O' zur Symmetrielinie.*

Ein bemerkenswerter Spezialfall tritt ein, wenn das Viereck $OABO'$ ein Parallelogramm ist und P als Mittelpunkt der Koppel gewählt wird, d. h. also wenn $a = b$, $2c = 2d = e$ gilt. Man übe in diesem Falle die durch:

$$x = x' + \frac{e}{2}, \quad y = y'$$

gegebene Parallelverschiebung der Achsen aus, so daß der neue Nullpunkt der Mittelpunkt der Strecke $O\bar{O}$ wird. Unter Benutzung der Abkürzung:

$$x'^2 + y'^2 - a^2 = \left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + y^2 - a^2 = H(x', y'),$$

ergibt sich sofort:

$$eF = H + ex, \quad eG = H - ex + e^2,$$

$$e(F + G) = 2H + e^2, \quad e(F - G) = 2ex,$$

$$e((x - e)F + xG) = e x'(F + G) - \frac{e^2}{2}(F - G) = 2x'H,$$

so daß die Gleichung (3) der Gleitkurve nach Multiplikation mit e^2 und Division durch 4 jetzt in:

$$(x'^2 + y'^2)H^2 + e^2y'^2H = 0$$

oder ausführlich geschrieben in:

$$(x'^2 + y'^2 - a^2) \{ (x'^2 + y'^2)^2 - a^2 x'^2 + (e^2 - a^2) y'^2 \} = 0$$

übergeht. Ist das Viereck $OABO'$ ein Parallelogramm, so zerfällt die durch den Mittelpunkt P der Koppel AB beschriebene Gleitkurve

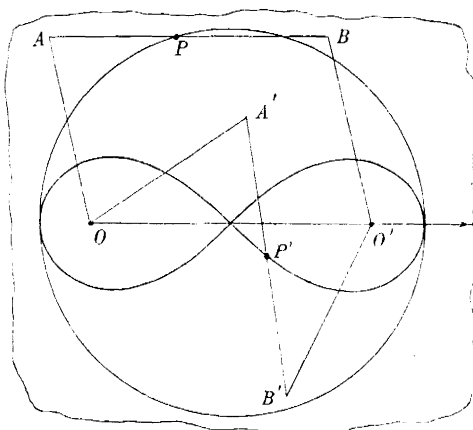


Fig. 73.

in den Kreis des Radius a um den neuen Nullpunkt, d. i. den Mittelpunkt der Basis OO' und eine durch:

$$(5) \quad (x'^2 + y'^2)^2 - a^2 x'^2 + (e^2 - a^2) y'^2 = 0$$

gegebene Kurve vierten Grades, welche die neuen Achsen zu Symmetrielinien hat.

Die Kurve vierten Grades berührt den Kreis von innen in den beiden Schnittpunkten des letzteren mit der x' -Achse und hat, falls $a < e$ ist, die in Fig. 73 gezeichnete schleifenförmige Gestalt, für $a > e$ aber die in Fig. 74 angegebene Form; endlich für $a = e$ zerfällt sie in zwei Kreise, die die y' -Achse im Nullpunkte berühren. Für den Fall $e = a\sqrt{2}$ gelangt man zu der als „Lemniskate“ benannten Kurve.

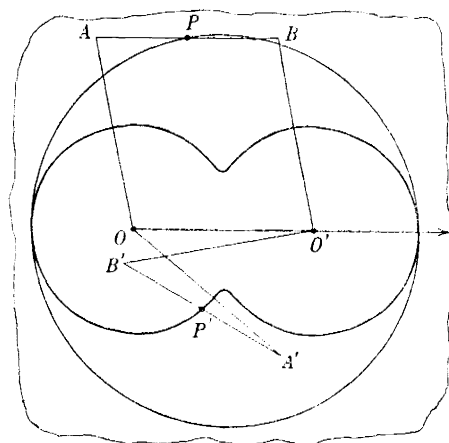


Fig. 74.

Bezeichnen wir mit r, ϑ die zu den neuen x', y' „gehörenden“ Polarkoordinaten, so gilt $x' = r \cos \vartheta$, $y' = r \sin \vartheta$, und man erhält als Polargleichung des durch (5) dargestellten Bestandteils vierten Grades der Gleitkurve:

$$(6) \quad r^2 = a^2 - e^2 \sin^2 \vartheta.$$

Hieraus folgt leicht, daß die fragliche Kurve vierten Grades in naher Beziehung zu den Kegelschnitten steht. Übt man nämlich die S. 25 erklärte Transformation der „Inversion“ am Kreise des Radius a um den neuen Nullpunkt aus, so geht der Punkt (r, ϑ) in den durch:

$$r = \frac{a^2}{r'}, \quad \vartheta = \vartheta'$$

gegebenen Punkt (r', ϑ') über. Die Gleichung (6) geht dabei in:

$$a^4 = a^2 r'^2 - e^2 r'^2 \sin^2 \vartheta'$$

oder bei Wiedereinführung der rechtwinkligen Koordinaten x', y' in:

$$(7) \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{(e^2 - a^2)y'^2}{a^4} = 1$$

über: Durch Inversion der Kurve (5) am Kreise des Radius a um den neuen Nullpunkt erhalten wir somit für $e > a$ eine Hyperbel, für $e < a$ eine Ellipse, wobei allemal OO' eine Hauptachse darstellt; im Übergangsfalle $e = a$ hat man ein Geradenpaar, nämlich das zur Ordinatenachse parallele Tangentenpaar des Kreises vom Radius a .

§ 45. Inversoren und Geradföhrungen.

Man denke sich die Seiten $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$, $\overline{DA} = d$ eines ebenen Vierecks als Stäbe, die in den Ecken A, B, C, D durch Gelenke aneinander gebunden sind. Mittels solcher „Gelenkvier-ecke“ lassen sich Mechanismen, sogenannte „Inversoren“, herstellen, welche die S. 25 erklärte und eben wieder herangezogene Transformation der „Inversion“ an einem Kreise zeichnerisch ausführen.

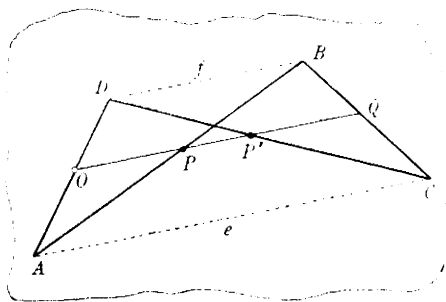


Fig. 75.

Bei dem von Hart angegebenen Inversor geht man von einem Parallelogramm aus, setzt also $c = a$, $d = b$, und nehme $a > b$ an. Das Gelenkparallelogramm $ABCD$ bringe man sodann in die durch Fig. 75 angegebene „überschlagene“ Gestalt, bei der also die Eckenanordnung $ADBC$ ein Antiparallelogramm liefert.

Die beiden parallelen Seiten $AC = e$, $BD = f$ des letzteren genügen nach einem bekannten Elementarsatze der Gleichung¹⁾:

$$(1) \quad e \cdot f = a^2 - b^2.$$

Parallel zu den Seiten e und f lege man nun die Transversale O, P, P', Q durch das Gelenkviereck und setze zur Abkürzung:

$$\overline{AO} : b = \overline{AP} : a = \lambda, \quad \overline{OP} = r, \quad \overline{OP'} = \overline{PQ} = r'.$$

Dann folgt leicht aus Ähnlichkeitsbetrachtungen:

$$r : f = \lambda, \quad r' : e = 1 - \lambda$$

und also mit Benutzung von (1):

$$rr' = \lambda(1 - \lambda)ef = \lambda(1 - \lambda)(a^2 - b^2).$$

Man denke nun den Punkt O der Seite AD des Gelenkvierecks in der Ebene fest. Alle dann noch möglichen Lagen des Vierecks sichern dem Punkt P freie Beweglichkeit in einem Kreisring um O vom Innenradius $AP - AO = (a - b)\lambda$ und vom Außenradius $(a + b)\lambda$. Setzt man abkürzend $\sqrt{\lambda(1 - \lambda)(a^2 - b^2)} = \varrho$, so folgt $rr' = \varrho^2$ und damit der Satz: *Beschreibt P irgendeine in jenem Kreisring gelegene Figur, so beschreibt P' die zu ihr bezüglich des Kreises vom Radius ϱ um O inverse Figur.*

Der von Peaucellier konstruierte Inversor (Fig. 76) besteht im wesentlichen aus einem Gelenkrhombus $ABCD$ der Seitenlänge

a , dessen zwei Gegenecken B und D auf der Peripherie eines Kreises von einem Radius $b > a$ beweglich sind. Die Beweglichkeit von B und D auf dieser Peripherie wird einfach dadurch hergestellt, daß man zwei um den Kreismittelpunkt O drehbare Stäbe der Länge b in die Rhombusecken durch Ge-

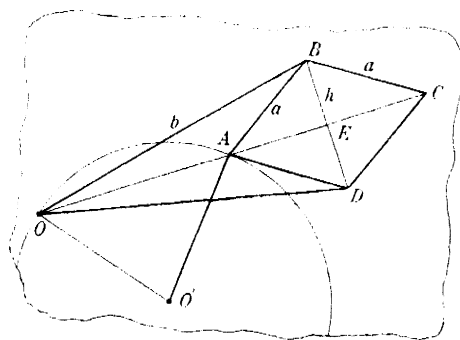


Fig. 76.

lenke einhängt (Fig. 76). Aus der Betrachtung gleichschenkliger Dreiecke über der gemeinsamen Basis BD erkennt man, daß O , A und C auf einer Geraden gelegen sind. Setzt man die halbe

1) Ist nämlich h der senkrechte Abstand der Seiten AC und BD , so gilt $e = \sqrt{a^2 - h^2} + \sqrt{b^2 - h^2}$, $f = \sqrt{a^2 - h^2} - \sqrt{b^2 - h^2}$, woraus die Gleichung (1) folgt.

Rhombusdiagonale $\overline{BE} = h$ und schreibt abkürzend $\overline{OA} = r$, $\overline{OC} = r'$, so gilt:

$$r = \overline{OE} - \overline{AE} = \sqrt{b^2 - h^2} - \sqrt{a^2 - h^2},$$

$$r' = \overline{OE} + \overline{EC} = \sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{a^2 - h^2},$$

woraus sich ergibt $r \cdot r' = b^2 - a^2$. Schreiben wir demnach $+\sqrt{b^2 - a^2} = \varrho$, so gilt wieder $r \cdot r' = \varrho^2$.

Der Punkt A ist hier zunächst in einem Kreisring um O mit dem Innenradius $(b - a)$ und dem Außenradius $(b + a)$ beweglich. Denkt man indessen in A und C Schreibstifte angebracht, die ein Hinwegschieben der Seiten AB und AD über die Seiten CB und CD des Rhombus verhindern, so ist A nur noch in einem Kreisring um O mit dem Innenradius $(b - a)$ und dem Außenradius $\varrho = \sqrt{b^2 - a^2}$ beweglich. *Beschreibt A in diesem Bereiche irgendeine Figur, so zeichnet zufolge $r \cdot r' = \varrho^2$ der Punkt C die bezüglich des Kreises vom Radius $\varrho = \sqrt{b^2 - a^2}$ inverse Figur.*

Beschreibt der Punkt P in Fig. 75 bzw. der Punkt A in Fig. 76 einen durch O hindurchlaufenden Kreis, so beschreibt nach einem S. 25 aufgestellten Satze der inverse Punkt P' bzw. C eine Gerade. *Man kann demnach die Inversoren durch Zusatz eines weiteren Stabes zu sogenannten „Geradföhrungen“ ausgestalten.* Fig. 76, in welcher der um den festen Punkt O' drehbare Stab $O'A$ ($= O'O'$) mit einem Gelenke in A eingehängt ist, erläutert dies.

§ 46. Begriff der Rollkurven nebst Beispielen.

Es seien in der Ebene eine feste und eine bewegliche Kurve gegeben, deren letztere die erstere berühren soll. Man stelle sich vor, daß die bewegliche Kurve längs der festen ohne zu gleiten abgerollt wird: Irgendein Punkt der beweglichen Kurve beschreibt dabei eine Linie, die wir als eine „Rollkurve“ bezeichnen.

Ist erstlich die bewegliche Kurve eine Gerade und also eine Tangente der festen Kurve, so heißt jede Rollkurve eine „Abwicklungskurve“ oder „Evolvente“ der festen Kurve. In Fig. 77 ist eine *Evolvente des Kreises* gezeichnet, wie sie vom Berührungspunkte der Tangente im Punkte O geliefert wird. Einige Lagen der rollenden Tangente sind punktiert angedeutet. Die ausgezogenen Teile BE , $B'E'$, $B''E''$ der Tangenten sollen die Herstellung der Evolvente als „Abwicklungskurve“ versinnlichen. Man denke sich nämlich in der innerhalb des Kreises angedeuteten Pfeilrichtung um die Peripherie von O aus einen unausdehnbaren Faden herumgewickelt und wickele demnächst diesen Faden unter Spannung ab. Der abgewickelte Teil des Fadens vom jeweiligen

Berührungspunkte B bis zum Fadenendpunkte E ist der ausgezogene Teil der Tangente, und der Fadenendpunkt E beschreibt das Stück $OEE'E'' \dots$ unserer Kurve.

Ist zweitens die feste Kurve eine *Gerade* und die bewegliche Kurve ein *Kreis*, so heißt eine zugehörige Rollkurve „*Zykloide*“ oder „*Radkurve*“, da eine

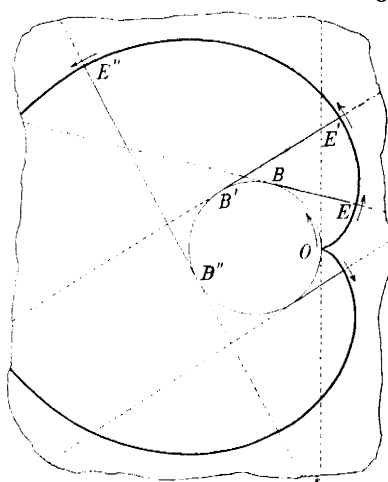


Fig. 77.

solche Kurve von einem Peripheriepunkte eines auf horizontaler Ebene geradlinig rollenden Rades beschrieben wird. Die Gestalt der Zykloide ist in Fig. 78 angegeben. Man gehe von dem im Punkte O berührenden Kreise aus und lasse den Kreis nach rechts rollen. Zwei weitere Lagen des Kreises sind in der Figur gezeichnet, wobei jedesmal der Radius nach dem anfänglichen Berührungspunkt angegeben ist. Der Endpunkt dieses Radius beschreibt die gezeichnete

Kurve; die ausgezogenen Bogen BE , $B'E'$ sind die jeweils abgerollten Teile der Peripherie des Kreises. Denken wir die Bewegung des rollenden Kreises nach links und rechts weiter fortgesetzt, so setzt sich die Kurve aus periodischer Wiederholung

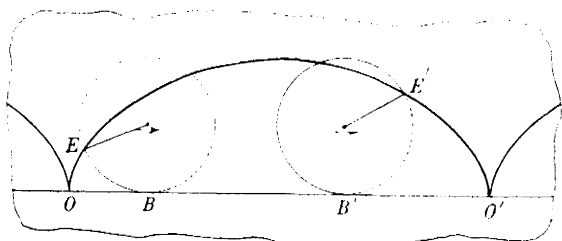


Fig. 78.

des zwischen zwei aufeinanderfolgenden Spitzen O , O' gelegenen Stückes zusammen.

Sind drittens beide Kurven *Kreise*, so werden die zugehörigen Rollkurven als „*zyklische Kurven*“ bezeichnet. Berührt jeder Kreis den anderen von außen, so heißt die Rollkurve insbesondere eine „*Epizykloide*“; ist der rollende Kreis kleiner als der feste, und

berührt jener diesen von innen, so nennt man die Rollkurve eine „Hypozykloide“. Diese Kurven mögen durch ein paar Beispiele ausführlicher betrachtet werden.

§ 47. Beispiele zyklischer Kurven.

Der Mittelpunkt des festen Kreises werde mit A , der des beweglichen mit B bezeichnet; die zugehörigen Radien seien a und b .

Die für $b = a$ eintretende Epizykloide hat die in Fig. 79 dargestellte Gestalt und heißt ebendieser Gestalt halber „Herzkurve“ oder „Kardioid“. In der Anfangslage berühre der bewegliche Kreis den festen im Punkte O ; dieser Punkt des beweglichen Kreises beschreibt alsdann die dargestellte Kurve, die sich wegen der Gleichheit beider Peripherien nach einem vollen Umlaufe des beweglichen Kreises schließt. In zwei Lagen ist der bewegliche Kreis in der Figur gezeichnet; die ausgezogenen Bogen CE und $C'E'$ sind bis dahin auf dem festen Kreise abgerollt.

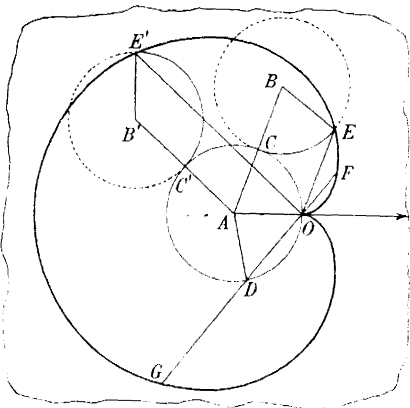


Fig. 79.

Zur Darstellung der Kurve durch eine Gleichung wählen wir O als Pol und die Verlängerung von AO über O als Polarachse. Für irgendeinen oberhalb der Polarachse gelegenen Punkt E der Kurve seien r, ϑ die Polarkoordinaten. Das Viereck $ABEO$ ist ein Antiparallelogramm mit den Bestimmungsstücken:

$$AB = 2a, \quad AO = BE = a, \quad OE = r, \quad \angle OAB = \vartheta.$$

Eine elementare Betrachtung zeigt demnach, daß:

$$(1) \quad r = 2a(1 - \cos \vartheta)$$

gilt. Da die Kurve die Polarachse zur Symmetrielinie hat und die Gleichung (1) für ϑ und $(360^\circ - \vartheta)$ gleiche Werte r liefert, so gilt diese Gleichung auch für den unterhalb der Polarachse liegenden Teil der Kurve: In (1) haben wir demnach die Polargleichung der Kardioiden vor uns. Im „zugehörigen“ rechtwinkligen System schreibt sich die mit r multiplizierte Gleichung (1):

$$x^2 + y^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} - 2ax.$$

Bringt man das letzte Glied nach links und quadriert, so folgt:

$$(2) \quad (x^2 + y^2 + 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

als Gleichung der Kardioiden in rechtwinkligen Koordinaten; die Kurve ist demnach vom vierten Grade. Auch die Diskussion der Kardioiden auf Grund der Gleichung (2) ist nicht schwierig, da dieselbe in y^2 vom zweiten Grade ist.

Eine durch O laufende Sehne FG der Kurve (Fig. 79) setzt sich aus zwei Radienvektoren $OF = r$ und $OG = r'$ zusammen, die zu zwei Amplituden ϑ und $\vartheta' = \vartheta + 180^\circ$ gehören. Da $\cos \vartheta' = \cos(\vartheta + 180^\circ) = -\cos \vartheta$ ist, so folgt auf Grund von (1) als Sehnenlänge $\overline{FG} = r + r' = 4a$. Da ferner die zugehörige Kreissehne $\overline{OD} = 2a \cos \vartheta$ ist, so folgt:

$$DG = OG - \overline{OD} = r' - 2a \cos \vartheta = 2a.$$

Eine durch O laufende Sehne der Kardioiden hat die konstante Länge $4a$, und ihr von O verschiedener Schnittpunkt mit dem festen Kreise ist ihr Mittelpunkt. Um demnach die Kardioiden mittels eines Stabmechanismus zu konstruieren, hänge man im Endpunkte D einer um A drehbaren Kurbel AD der Länge a in einem Gelenke einen Stab FG der Länge $4a$ an, dessen Mittelpunkt D ist. Denkt man in O einen Zapfen angebracht und läßt den Stab FG längs desselben gleiten, so beschreiben die Endpunkte F und G die Kardioiden.

Man wähle eine von O verschiedene positive Zahl p und setze $+\sqrt{2ap} = q$. Die Inversion am Kreise des Radius q um den Mittelpunkt O ordnet je zwei Punkte (r, ϑ) und (r', ϑ) einander zu, für deren Radienvektoren die Bedingung $rr' = q^2$ gilt. Genügt (r, ϑ) der Gleichung (1), so folgt für (r', ϑ) :

$$rr' = 2ar'(1 - \cos \vartheta) = q^2 = 2ap, \quad r' = \frac{p}{1 - \cos \vartheta}.$$

Damit haben wir die S. 64 aufgestellte Polargleichung der Parabel gewonnen: Die Kardioiden geht durch Inversion am Kreise des Radius $\sqrt{2ap}$ um O in die Parabel des Parameters $2p$, des Brennpunktes O und der auf der Polarachse liegenden Achse über.

Um auch ein Beispiel einer Hypozykloide zu betrachten, wählen wir $a = 4b$. Der bewegliche Kreis möge am Anfang den festen im Punkte O berühren; die Bahn dieses Punktes des beweglichen Kreises soll verfolgt werden, falls der letztere in der in Fig. 80 bei O angebrachten Pfeilrichtung auf der festen Peripherie abrollt. Da die bewegliche Peripherie gleich dem vierten Teile der festen ist, so wird jene genau auf einem Quadranten

der festen Peripherie einmal abrollen. Die Hypozykloide besteht demnach aus vier kongruenten, sternförmig aneinander gefügten Stücken (Fig. 80) und trägt den Namen der „Sternkurve“ oder „Astroide“.

Zur analytischen Darstellung wählen wir A als Pol und AO als Achse für Polarkoordinaten und führen daneben ein zweites bewegliches System mit dem Mittelpunkte B als Pol und einer

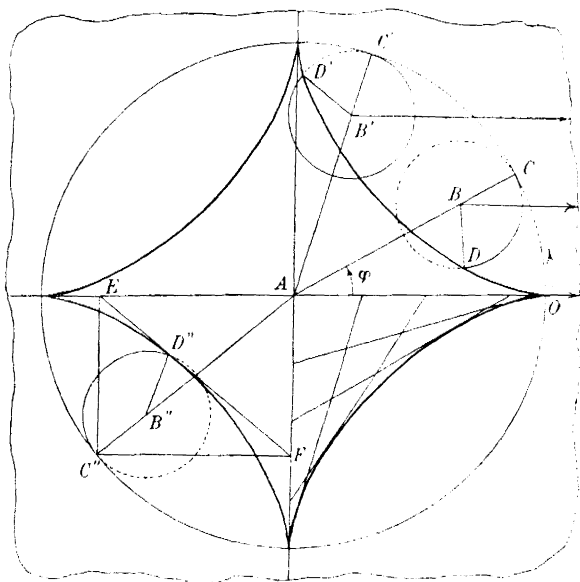


Fig. 80.

zu AO parallelen und gleichgerichteten Achse ein. Der bewegliche Kreis ist im ersten Quadranten der Fig. 80 in zwei Lagen gezeichnet, wobei der bis dahin abgerollte Bogen CD jedesmal ausgezogen, der Rest der Peripherie punktiert ist. Für irgendeine Lage des beweglichen Kreises seien die Polarkoordinaten des Mittelpunktes B im ersten System $3b$ und φ (Fig. 80). Da der Winkel $\angle CBD$ bereits bis 360° gewachsen ist, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, OAB den Wert 90° erreicht hat, so gilt $\angle CBD = 4\varphi$, und also sind die Polarkoordinaten des Punktes D der Astroide im zweiten System b und -3φ , woraus sich als „zugehörigen“ rechtwinkligen Koordinaten $b \cos 3\varphi$, $-b \sin 3\varphi$ berechnen. Der Nullpunkt B dieses zweiten Systems hat im ersten die rechtwinkligen Koordinaten $3b \cos \varphi$, $3b \sin \varphi$. Sind also x, y die Koordinaten des zum Winkel φ gehörenden Astroidenpunktes D im rechtwinkligen

System des Nullpunktes A und der positiven x -Achse AO , so folgt aus (1) S. 5:

$$x = 3b \cos \varphi + b \cos 3\varphi, \quad y = 3b \sin \varphi - b \sin 3\varphi.$$

Entlehnend wir der Trigonometrie die Formeln:

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \quad \sin 3\varphi = -4 \sin^3 \varphi + 3 \sin \varphi,$$

so folgt bei Benutzung der Gleichung $4b = a$ als *Darstellung der Koordinaten x, y des zum Winkel φ gehörenden Astroidenpunktes*:

$$(3) \quad x = a \cos^3 \varphi, \quad y = a \sin^3 \varphi;$$

dabei beschreibt der Punkt (x, y) die ganze Kurve, wenn φ von 0° bis 360° wächst.¹⁾

Indem man die Gleichungen (3) in die Potenz des Exponenten $\frac{2}{3}$ erhebt und hernach addiert, ergibt sich als „irrationalc“ Gleichung der Astroide:

$$(4) \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Durch Erheben zur dritten Potenz folgt unter nochmaliger Benutzung von (4):

$$x^2 + 3(xy)^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}) + y^2 = x^2 + y^2 + 3(axy)^{\frac{2}{3}} = a^2.$$

Hieraus ergibt sich als „rationalc“ Gleichung:

$$(5) \quad (x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0,$$

so daß die Astroide eine algebraische Kurve sechsten Grades ist, die die Koordinatenachsen zu Symmetrielinien hat.

Bei weiterer Untersuchung der Kurve arbeiten wir zweckmäßig mit den beiden Gleichungen (3), wobei wir den einzelnen Kurvenpunkt durch den zugehörigen Winkel φ festlegen. So können wir z. B. die durch die beiden zu φ und φ' gehörenden Astroidenpunkte hindurchlaufende Sekante durch die Gleichung²⁾:

$$\frac{x - a \cos^3 \varphi}{y - a \sin^3 \varphi} = \frac{\cos^3 \varphi' - \cos^3 \varphi}{\sin^3 \varphi' - \sin^3 \varphi}$$

darstellen. Zerlegen wir rechter Hand die Differenzen der Kuben nach der Regel $m^3 - n^3 = (m^2 + mn + n^2)(m - n)$ und benutzen die Relation:

$$\frac{\cos \varphi' - \cos \varphi}{\sin \varphi' - \sin \varphi} = - \frac{\sin \varphi' + \sin \varphi}{\cos \varphi' + \cos \varphi},$$

1) Die Ableitung der Gleichungen (3) bezog sich allerdings nur auf einen beliebigen Winkel φ des ersten Quadranten; doch gelten diese Formeln infolge der Symmetrie der Astroide in bezug auf die Koordinatenachsen allgemein.

2) S. die Angaben S. 15 über die Zweipunktform der Geradengleichung.

so erhalten wir als Gleichung der Astroidensekante:

$$\frac{x - a \cos^3 \varphi}{y - a \sin^3 \varphi} = - \frac{\cos^2 \varphi' + \cos \varphi' \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi' + \sin \varphi' \sin \varphi + \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi' + \sin \varphi}{\cos \varphi' + \cos \varphi}.$$

Lassen wir beide Punkte zusammenrücken und also $\varphi' = \varphi$ werden, so folgt als *Gleichung der Astroidentangente mit dem zum Winkel φ gehörenden Berührungspunkte*:

$$\frac{x - a \cos^3 \varphi}{y - a \sin^3 \varphi} = - \cotg \varphi$$

oder nach einfacher Umrechnung:

$$(6) \quad \frac{x}{\cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi} = a,$$

so daß die Tangente die Koordinatenachsen in den Punkten $a \cos \varphi$, $a \sin \varphi$ schneidet. Die sich hieraus ergebende Tangentenkonstruktion ist im dritten Quadranten der Fig. 80 ausgeführt. Man hat vom Endpunkte C'' des zur Amplitude φ gehörenden Kreisradius AC'' die Lote auf die Achsen zu fallen, deren Fußpunkte E und F unmittelbar die Schnittpunkte der Tangente mit den Achsen sind. Es folgt weiter: *Die Länge des zwischen den Achsen gelegenen Stückes jeder Astroidentangente ist konstant gleich a .* Die Astroide steht demnach in naher Beziehung zu dem in § 42 (S. 72) besprochenen Gleitprozeß. Ist bei demselben die Länge der gleitenden Strecke gleich a , so liefern die gesamten Lagen der Strecke gerade das System aller Astroidentangenten (s. die Skizze im vierten Quadranten der Fig. 80).

II. Teil.

Analytische Geometrie des Raumes.

Kap. VI. Die Koordinaten im Raume und die Darstellung der Flächen und Kurven durch Gleichungen.

§ 48. Die Kartesischen Koordinatensysteme im Raume.

In Fig. 81 sind drei einander senkrecht schneidende (unbegrenzte) Ebenen durch umrissene Vierecke angedeutet. Ihre drei im Punkte O aufeinander senkrecht stehenden Schnittgeraden bilden das rechtwinklige „Achsenkreuz“ für die zu erklärenden Koordinaten. In der durch die beiden Achsen OX und OY festgelegten, etwa horizontal zu denkenden Ebene führen wir in der bisherigen Art rechtwinklige Koordinaten x, y ein, wobei die Pfeilspitzen die positiven Achsenrichtungen angeben sollen; die

positive x -Achse ist also nach rechts, die positive y -Achse vom Beschauer fort gerichtet. Die fragliche Ebene heiße kurz „ x, y -Ebene“.

Ist P irgendein Punkt im Raume, so fälle man von P das Lot PQ auf die x, y -Ebene und erteile dem Punkte P als rechtwinklige kartesische Koordinaten erstlich die zum Fußpunkte Q gehörenden x, y , zweitens als dritte Koordinate z die in der bisherigen Einheit gemessene Lotlänge PQ , mit positivem oder negativem Vorzeichen versehen,

je nachdem P oberhalb oder unterhalb der x, y -Ebene liegt. Die Punkte der x, y -Ebene selbst bekommen natürlich $z = 0$ als dritte Koordinate.

Dieser Vorschrift entsprechend nennen wir die auf der x, y -Ebene senkrecht stehende Achse OZ fortan z -Achse; die positive

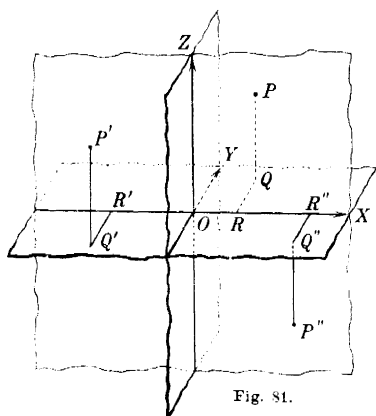


Fig. 81.

z -Achse ist nach oben gerichtet. Die beiden in der z -Achse sich schneidenden „Koordinatenebenen“ heißen im Anschluß hieran „ y, z -Ebene“ und „ z, x -Ebene“.

Dreht man den Raum um die z -Achse in dem Sinne, welcher die positive x -Achse nach Durchlaufung eines rechten Winkels in die positive y -Achse überführt, und verbindet mit dieser Drehung eine Verschiebung des Raumes in Richtung der positiven z -Achse, so entsteht die Bewegung einer „rechtsgängigen Schraube“. Bei dieser Anordnung der positiven Richtungen der x -, y - und z -Achsen nennen wir entsprechend das Koordinatensystem ein „Rechtssystem“; ein solches soll weiter ausschließlich benutzt werden.

Die drei Koordinatenebenen zerlegen den Raum in acht „Oktanten“ (Winkelräume), welche den acht Vorzeichenkombinationen der x, y, z entsprechen. Für die drei in Fig. 81 gezeichneten Punkte P, P', P'' , die drei verschiedenen Oktanten angehören, hat man z. B.:

$$\begin{aligned} x &= + OR, & y &= + \bar{Q}R, & z &= + PQ, \\ x' &= - OR', & y' &= - Q'R', & z' &= + P'Q', \\ x'' &= + \bar{O}R'', & y'' &= - Q''R'', & z'' &= - P''Q'', \end{aligned}$$

Für das ausgewählte „rechtwinklige kartesische Koordinatensystem“ gilt hiernach der Satz: *Jedem endlichen Raumpunkte P gehört eindeutig ein bestimmtes System von Koordinaten x, y, z zu, und jedem System endlicher Zahlen x, y, z entspricht umgekehrt eindeutig ein Punkt P .*

Um die Gleichberechtigung der Koordinaten besser hervortreten zu lassen, legen wir durch P drei zu den Koordinatenebenen parallele Ebenen, welche mit jenen ein rechtwinkliges Parallelepiped einschließen (Fig. 82). Die Koordinaten von P können dann z. B. durch die drei Kanten PQ', PQ'', PQ , d. h. durch die drei Lote von P auf die Koordinatenebenen (unter Zufügung des richtigen Vorzeichens) erklärt werden oder auch durch die drei Achsenabschnitte OR, OR', OR'' . Man beachte, daß man diese drei Abschnitte auch dadurch erhalten kann, daß man von P die drei Lote auf die Achsen (Rechteckkoordinaten) PR, PR', PR'' fällt. Diese Art der Bestimmung von x, y, z kommt unten öfters zur Verwendung.

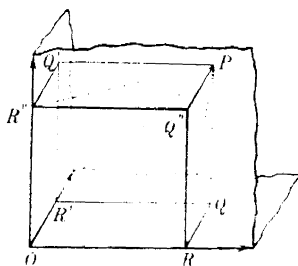


Fig. 82.

Die Verallgemeinerung auf „schiefwinklige“ kartesische Koordinaten ist einfach. Man wähle eine erste, etwa horizontale Ebene und bestimme in ihr nach S. 2 ein kartesisches System x, y mit

beliebigem Achsenwinkel w . Durch den Nullpunkt O dieses Systems lege man dann eine beliebige, jedoch nicht der x, y -Ebene angehörende z -Achse mit einer etwa wieder nach oben weisenden positiven Richtung. Von einem beliebigen Punkte P des Raumes ist dann PQ parallel zur z -Achse bis zu dem in der x, y -Ebene gelegenen Endpunkte Q zu ziehen. Die Koordinaten x, y von Q , zu denen als z -Koordinate die mit dem richtigen Vorzeichen versehene Länge PQ hinzukommt, bilden dann die *schiefwinkligen kartesischen Koordinaten von P* .

Man wird leicht die übrigen für die rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Ausführungen auf diesen allgemeineren Fall übertragen. Um z. B. die Koordinaten x, y, z eines Punktes P im neuen System gleichförmig zu erklären, ziehe man von P Parallele zu den Achsen bis an die Koordinatenebenen heran; die mit dem richtigen Vorzeichen versehenen Längen dieser Parallelen geben die Koordinaten von P . Auch bei schiefwinkligen Achsen der vereinbarten Anordnung sprechen wir von einem „Rechtssystem“; eine Drehung der x, y -Ebene um O , bei welcher die positive x -Achse nach Durchlaufung des Winkels w in die positive y -Achse übergeht, vereint mit einer Parallelverschiebung senkrecht zur x, y -Ebene nach Seiten der „positiven“ z -Achse, liefert eben wieder eine „rechtsgängige“ Schraube.

§ 49. Parallelverschiebung der Koordinatenachsen.

Neben dem ersten *rechtwinkligen* Systeme sei ein zweites vorgelegt, dessen Nullpunkt O' im ersten System die Koordinaten a, b, c hat, und dessen Achsen den gleich benannten Achsen des ersten Systemes parallel und gleichgerichtet sind. Die alten Koordinaten eines einzelnen Punktes P seien x, y, z , die neuen x', y', z' .

Der senkrechte Abstand der x', y' -Ebene von der x, y -Ebene ist gleich $|c|$. Ist $c > 0$ und liegt P oberhalb beider Ebenen, so ist das Lot PQ' von P auf die x', y' -Ebene um die Länge $Q'Q = c$ über Q' zu verlängern, um das Lot PQ von P auf die x, y -Ebene zu geben. Demnach gilt $z = z' + c$. Für $c = 0$ ist dies selbstverständlich. Man überzeuge sich, daß die Relation $z = z' + c$ auch für $c < 0$ und auch für alle sonstigen Lagen von P richtig bleibt. Da entsprechende Betrachtungen für x und y gelten, so folgt: Bei einer „Parallelverschiebung“ oder „Translation“ des rechtwinkligen Achsenkreuzes nach dem Nullpunkte O' der alten Koordinaten a, b, c transformieren sich die alten Koordinaten x, y, z irgendeines Punktes auf dessen neue Koordinaten x', y', z' mittels der Gleichungen:

$$(1) \quad x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c.$$

Diese Regel bleibt, wie man leicht zeigt, auch bei schiefwinkligen Koordinaten bestehen.

§ 50. Ausdruck der Entfernung zweier Punkte in rechtwinkligen Koordinaten.

Der Punkt P der Koordinaten x, y, z werde kurz durch das Symbol (x, y, z) bezeichnet. Das Lot \overline{PQ} auf die x, y -Ebene und die Strecken \overline{OQ} und \overline{OP} bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit \overline{OP} als Hypotenuse. Da $\overline{PQ} = |z|$ und nach (1) § 4, S. 7, die Strecke $\overline{OQ} = +\sqrt{x^2 + y^2}$ ist, so folgt: *Die Entfernung des Punktes (x, y, z) vom Nullpunkte ist bei rechtwinkligen Koordinaten gegeben durch:*

$$(1) \quad \overline{OP} = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Sind zwei Punkte P_1 und P_2 oder (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) gegeben, so führe man eine Parallelverschiebung der Achsen nach P_2 als neuen Nullpunkt aus. Die Koordinaten x', y', z' von P_1 im neuen System sind nach (1) § 49:

$$x' = x_1 - x_2, \quad y' = y_1 - y_2, \quad z' = z_1 - z_2.$$

Aus der eben angegebenen Regel (1) folgt somit: *Die Entfernung $\overline{P_1 P_2}$ zweier durch rechtwinklige Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 gegebenen Punkte P_1, P_2 ist dargestellt durch:*

$$(2) \quad \overline{P_1 P_2} = +\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

§ 51. Radiusvektor und Richtungswinkel im rechtwinkligen System.

Die Strecke OP verstehen wir mit einer nach P weisenden Pfeilrichtung und nennen sie den „*Radiusvektor*“ des Punktes P ; abkürzend setzt man $OP = r$. Die Winkel zwischen OP und den positiven Achsen sollen die „*Richtungswinkel*“ des Radiusvektor in bezug auf die rechtwinkligen Koordinatenachsen heißen und durch:

$$\alpha = \sphericalangle POX, \quad \beta = \sphericalangle POY, \quad \gamma = \sphericalangle POZ$$

bezeichnet werden (Fig. 83). Gemeint ist jedesmal der nicht-konvexe unter den beiden sich zu 360° ergänzenden Winkeln zwischen dem Radiusvektor und der einzelnen Achse.

Man veranschauliche sich in Fig. 83, daß für den mit P bezeichneten Punkt alle drei Winkel α, β, γ spitz sind, für P' aber α, β stumpf und γ spitz ausfallen. Offenbar ist der Winkel α spitz, falls $x > 0$, und stumpf, falls $x < 0$ ist; und eine entsprechende Aussage gilt für β und γ . Je nachdem P zur rechten oder linken Seite der y, z -Ebene liegt, gilt:

$\overline{OR} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha$ oder $\overline{OR} = \overline{OP} \cdot \cos (180^\circ - \alpha) = -\overline{OP} \cdot \cos \alpha$, wie Fig. 83 zeigt.¹⁾ Da im ersten Falle $x = \overline{OR}$, im zweiten $x = -\overline{OR}$ gilt, so ist beidemale $x = r \cdot \cos \alpha$, was auch für $x = 0$ und also $\alpha = 90^\circ$ gültig bleibt. Durch Übertragung der gleichen Betrachtung auf y und z folgt: Die rechtwinkligen Koordinaten von P berechnen sich aus dem Radiusvektor und den Richtungswinkeln so:

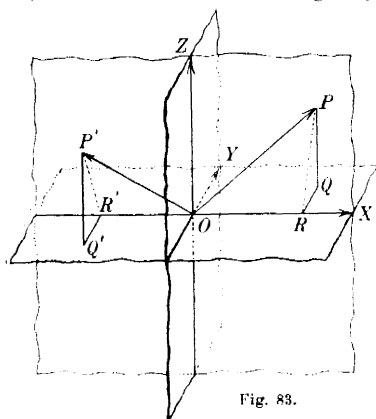


Fig. 83.

$$(1) \quad \begin{cases} x = r \cos \alpha, \\ y = r \cos \beta, \\ z = r \cos \gamma. \end{cases}$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen folgt bei Benutzung von (1) § 50: Die drei Richtungswinkel eines Radiusvektor sind stets durch die Beziehung verbunden:

$$(2) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Für eine beliebige mit einer Pfeilrichtung versehene Gerade des Raumes führen wir gleichfalls drei „Richtungsunterschiede“ α, β, γ gegen die positiven Koordinatenachsen ein, welche einfach gleich den Richtungswinkeln eines mit der Geraden parallelen und gleichgerichteten Radiusvektor sein sollen. Die Relation (2) gilt dann natürlich für die Richtungsunterschiede jeder solcher Geraden.

§ 52. Ausdruck für den Richtungsunterschied zweier Geraden.

Zwei vom Nullpunkte O des rechtwinkligen Systems ausziehende Gerade²⁾ mögen die Richtungswinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ haben. Der von ihnen eingeschlossene nicht-konvexe Winkel heiße ϑ . Um einen Ausdruck für ϑ in den $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_2$ zu gewinnen, trage man auf beiden Geraden von O aus Strecken gleich der Längeneinheit ab. Die Endpunkte P_1, P_2 dieser Strecken mögen die Koordinaten a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 haben; nach (1) § 51 gilt:

$$(1) \quad a_i = \cos \alpha_i, \quad b_i = \cos \beta_i, \quad c_i = \cos \gamma_i, \quad (i = 1, 2);$$

1) Man erinnere sich, daß PR senkrecht zur x -Achse verläuft (s. S. 91).

2) Solche nur nach der einen Seite ins Unendliche laufende Geraden bezeichnet man wohl auch als „Strahlen“.

man bezeichnet die a_i, b_i, c_i dieserhalb auch als die „*Richtungskosinus*“ des Radiusvektor OP_i . In den a_i, b_i, c_i stellt sich nach (2) § 50 das Quadrat der Entfernung $\overline{P_1 P_2}$ so dar:

$$\overline{P_1 P_2}^2 = (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2.$$

Entwickelt man rechts die Quadrate der Binome und benutzt (2) § 51, so folgt:

$$(2) \quad \overline{P_1 P_2}^2 = 2 - 2(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2).$$

Andererseits folgt bei Anwendung des Kosinussatzes der Trigonometrie auf das Dreieck $OP_1 P_2$:

$$\overline{P_1 P_2}^2 = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - 2\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} \cos \vartheta$$

oder, da $\overline{OP_1} = \overline{OP_2} = 1$ gilt:

$$\overline{P_1 P_2}^2 = 2 - 2 \cos \vartheta.$$

Der Vergleich mit (2) ergibt: Für den Winkel ϑ zwischen zwei von O ausziehenden Geraden gilt die Darstellung:

$$(3) \quad \cos \vartheta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

in den *Richtungskosinus* a_i, b_i, c_i der Geraden.

Eine einfache Rechnung zeigt das Bestehen der identischen Gleichung:

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2 \\ &= (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2. \end{aligned}$$

Für unsere Richtungskosinus ist der Wert der linken Seite gleich $1 - \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta$: An Stelle von (3) kann man für den nicht-konvergen Winkel ϑ auch die Relation gebrauchen:

$$(4) \quad \sin \vartheta = \pm \sqrt{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}.$$

Für irgend zwei gerichtete Gerade des Raumes erklären wir als nicht-konvexen „*Richtungsunterschied*“ ϑ den Winkel zwischen den beiden von O ausziehenden Geraden, die mit den gegebenen parallel und gleichgerichtet sind. Man kann diesen Winkel ϑ auch dadurch konstruieren, daß man durch irgendeinen Punkt der einen der beiden gegebenen Geraden eine zur anderen parallele und gleichgerichtete Gerade legt. Für den Richtungsunterschied ϑ gelten dann wieder die Darstellungen (3) und (4) in den „*Richtungskosinus*“ der beiden gegebenen Geraden.¹⁾

1) D. i. in den Kosinus der Richtungsunterschiede der Geraden gegen die positiven Achsen (s. Schluß von § 51).

§ 53. Teilung und Verlängerung einer Strecke nach gegebenem Verhältnis.

Die S. 7 ff. gegebenen Entwicklungen über Teilung und Verlängerung einer Strecke nach gegebenem Verhältnis übertragen sich leicht auf den Raum. In einem beliebigen, nicht notwendig rechtwinkligen Systeme habe ein vom Nullpunkt O verschiedener Punkt P_1 die Koordinaten x_1, y_1, z_1 . Auf der durch O und P_1 hindurchlaufenden Geraden sei irgendein Punkt P der Koordinaten x, y, z gewählt. Die beiden zur z -Achse parallelen, bis zur x, y -Ebene reichenden Geraden PQ und P_1Q_1 liefern, richtig bezeichnet, z und z_1 . Da $\triangle OPQ \sim \triangle OP_1Q_1$ ist, so gilt:

$$\overline{PQ} : \overline{P_1Q_1} = OP : OP_1.$$

Das Verhältnis $OP : OP_1$ werde mit $+\mu$ oder $-\mu$ bezeichnet, je nachdem die Punkte P und P_1 unserer Geraden auf der gleichen Seite von O oder zu verschiedenen Seiten des Nullpunktes liegen. Da z und z_1 im ersten Falle dasselbe, im zweiten aber entgegengesetzte Zeichen haben, so gilt in jedem Falle $z = \mu z_1$. Diese Betrachtung überträgt sich sofort auf x und y . Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\pm \mu$ als Verhältnis $\overline{OP} : \overline{OP_1}$ ergibt sich: *Irgendein Punkt P der durch O und P_1 laufenden Geraden hat die Koordinaten:*

$$(1) \quad x = \mu x_1, \quad y = \mu y_1, \quad z = \mu z_1,$$

und zwar liefern die dem Intervall $0 \leq \mu \leq 1$ angehörenden Multiplikatoren μ die Punkte der Strecke OP_1 , die Endpunkte O und P_1 eingeschlossen, für $\mu < 0$ erhält man die Punkte auf der Verlängerung jener Strecke über O hinaus und für $\mu > 1$ die Punkte der Verlängerung über P_1 .

Weiter gelten die an die Gleichung (2) S. 8 angeschlossenen Überlegungen und Rechnungen unverändert, wobei nur neben die Gleichungen für die Koordinaten x und y jeweils noch eine dritte Gleichung für die z -Koordinaten tritt. Auch die Erweiterung der Betrachtung auf Teilung und Verlängerung einer beliebigen Strecke P_1P_2 bleibt unverändert gültig. Es folgt: *Der Punkt P , welcher eine Strecke P_1P_2 nach dem Verhältnis:*

$$(2) \quad P_2P : \overline{P_1P} = m_1 : m_2$$

teilt bzw. verlängert, hat die Koordinaten:

$$(3) \quad x = \frac{m_1 x_1 \pm m_2 x_2}{m_1 \pm m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 \pm m_2 y_2}{m_1 \pm m_2}, \quad z = \frac{m_1 z_1 \pm m_2 z_2}{m_1 \pm m_2},$$

wobei die oberen Zeichen der Teilung, die unteren aber der Verlängerung zukommen. Insbesondere gilt für $m_1 = m_2$: *Der Mittel-*

punkt der Strecke P_1P_2 hat die arithmetischen Mittel der Koordinaten der Endpunkte zu Koordinaten:

$$(4) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

§ 54. Transformation kartesischer Koordinaten.

Die Wirkung einer Parallelverschiebung des Achsenkreuzes ist bereits in (1) § 49 dargestellt. Weiter sind noch zwei besondere Fälle von Koordinatentransformationen zu betrachten.

I. Beide Systeme seien rechtwinklig und zwar „Rechtssysteme“ und haben den Nullpunkt O gemein.

Man denke um O eine Kugelfläche des Radius 1 gelegt und hebe, wie in Fig. 84 geschehen ist, die x, y -Ebenen des alten und neuen Systems als Diametralebenen der Kugel durch Zeichnung ihrer Schnitkreise mit der Kugeloberfläche hervor; sie schneiden einander im Kugeldurchmesser KOK' (Fig. 84). Es sei $\angle KOX = \psi$ der dem Intervall $0 \leq \psi < 180^\circ$ angehörende Winkel zwischen jenem Durchmesser und der positiven x -Achse des alten Systems. Ferner sei ϑ der „Richtungswinkel“ der neuen positiven z -Achse OZ' gegen die alte OZ . Drittens sei $\angle KOX' = \varphi$ die in der x', y' -Ebene in bezug auf die Polarachse OK gemessene „Amplitude“ der neuen Achse OX' .

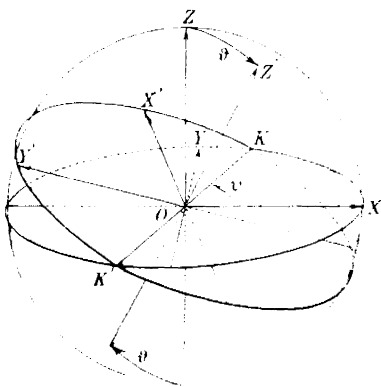


Fig. 84.

Das alte Achsenkreuz kann durch Drehung in das neue übergeführt werden. Zuerst drehe man das alte Achsenkreuz um die z -Achse durch den Winkel ψ , wobei die positive x -Achse auf den Radius OK zu liegen kommt. Irgendein Punkt P der alten Koordinaten x, y, z habe in dieser Zwischenlage des Systems die Koordinaten x_1, y_1, z_1 . Nach (5) S. 6 gilt:

$$x = x_1 \cos \psi - y_1 \sin \psi, \quad y = x_1 \sin \psi + y_1 \cos \psi, \quad z = z_1.$$

Sodann drehe man das eben erhaltene Kreuz um die x_1 -Achse OK durch den Winkel ϑ , wobei die z_1 -Achse nach OZ' und die x_1, y_1 -Ebene bereits in die x', y' -Ebene gedreht wird. Nennen wir x_2, y_2, z_2 die Koordinaten von P in dieser zweiten Zwischenlage des Systems, so gilt wieder nach (5) S. 6:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \cos \vartheta - z_2 \sin \vartheta, \quad z_1 = y_2 \sin \vartheta + z_2 \cos \vartheta.$$

Eine dritte Drehung um OZ' durch den Winkel φ führt zum neuen System:

$$x_2 = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y_2 = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \quad z_2 = z'.$$

Die Elimination von x_1, y_1, \dots, z_2 aus diesen Gleichungen ergibt: Die alten Koordinaten x, y, z des einzelnen Punktes P hängen mit den neuen x', y', z' durch drei lineare Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z', \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z', \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z'. \end{cases}$$

zusammen, deren neun Koeffizienten sich in den drei Drehungswinkeln φ, ψ, ϑ so darstellen:

$$(2) \quad \begin{cases} a_1 = + \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ a_2 = - \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \vartheta, \\ a_3 = + \sin \psi \sin \vartheta, \\ b_1 = + \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ b_2 = - \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \vartheta, \\ b_3 = - \cos \psi \sin \vartheta, \\ c_1 = \sin \varphi \sin \vartheta, \quad c_2 = \cos \varphi \sin \vartheta, \\ c_3 = \cos \vartheta. \end{cases}$$

Die Richtungswinkel der neuen Achse OX' im alten System seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, diejenigen von OY' und OZ' entsprechend $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$. Der Punkt $x' = 1, y' = 0, z' = 0$ hat dann im alten System die Koordinaten $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$. Diese Werte müssen also in (1) für x, y, z herauskommen, wenn wir $x' = 1, y' = 0, z' = 0$ eintragen, so daß sich $a_1 = \cos \alpha_1, b_1 = \cos \beta_1, c_1 = \cos \gamma_1$ ergibt. Die Ausdehnung der Betrachtung auf die Achsen OY' und OZ' ergibt: Die Koeffizienten in (1) sind die neun „Richtungskosinus“ der neuen Achsen im alten System:

$$(3) \quad a_i = \cos \alpha_i, \quad b_i = \cos \beta_i, \quad c_i = \cos \gamma_i, \quad (i = 1, 2, 3).^1)$$

1) Die Regeln (1) und (3), d. i. die lineare Beziehung zwischen den alten und neuen Koordinaten und die Darstellung der Koeffizienten a_i, \dots, c_i als Richtungskosinus, bleiben bestehen, wenn eines oder beide Systeme „Linkssysteme“ sind. Z. B. führt die Transformation $x = x', y = y', z = -z''$ das neue System in ein Linkssystem über, woraus dann die Richtigkeit der Behauptung leicht folgt. Nur der Kürze halber arbeiten wir im Texte ausschließlich mit Rechtssystemen.

Es bestehen zufolge (2) S. 94 und (3) S. 95, da die neuen Achsen aufeinander senkrecht stehen, die Beziehungen:

$$(4) \quad a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, \quad a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k = 0, \quad (i \neq k).$$

Durch Eintragung der Ausdrücke (2) für die a_1, \dots, c_3 kann man diese Relationen direkt bestätigen.

Auf Grund von (4) ergibt die Auflösung von (1) nach x', y', z' :

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$

$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$

$$z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z.$$

Dies ist auch unmittelbar einleuchtend, da a_1, a_2, a_3 die Richtungskosinus der Achse OX im neuen Systeme usw. sind.

Durch Vereinigung einer Parallelverschiebung (1) S. 92 mit einer darauffolgenden Drehung des Achsenkreuzes um den Nullpunkt erhalten wir *die allgemeinste Transformation eines rechtwinkligen Rechtssystems wieder auf ein solches in der Gestalt der linearen Beziehungen*:

$$(5) \quad \begin{cases} x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' + a, \\ y = b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' + b, \\ z = c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' + c, \end{cases}$$

wo a, b, c die Koordinaten des neuen Nullpunktes im alten Systeme sind und die neun Koeffizienten a_1, \dots, c_3 die Kosinus der Richtungsunterschiede der neuen Achsen in bezug auf die alten bedeuten.

II. Das ursprüngliche System sei rechtwinklig, das neue beliebig schiefwinklig; die Nullpunkte mögen zusammenfallen¹⁾.

Die Transformation kleidet sich notwendig wieder in die lineare Gestalt (1). Man nehme nämlich in der x, y -Ebene irgendeines schiefwinkligen Systems die durch Fig. 8 S. 5 angegebene Änderung der y -Achse vor, was nach (3) S. 6:

$$x = x' - y' \cotg w, \quad y = \frac{y'}{\sin w}, \quad z = z'.$$

als *lineare* Beziehung liefert. Der Winkel zwischen der x -Achse und y -Achse des damit erhaltenen Kreuzes ist jetzt bereits ein rechter. In der neuen y, z -Ebene wiederhole man eine entsprechende Änderung mit der z -Achse, worauf auch der Winkel zwischen der y -Achse und der z -Achse des damit erhaltenen Kreuzes ein rechter wird. Eine dritte Ausübung der gleichen Operation in der jetzigen x, y -Ebene führt in der Tat zu einem rechtwinkligen Achsenkreuz des ursprünglichen Nullpunktes, wobei die Kombination der drei Systeme

1) Der Kürze halber mögen wieder beide Systeme „Rechtssysteme“ sein.

linearer Beziehungen zwischen den ursprünglichen Koordinaten und den des zuletzt erhaltenen rechtwinkligen Systems auf Gleichungen der Gestalt (1), d. h. auf *lineare* Gleichungen, führt. Diese Gestalt der Gleichungen bleibt gewahrt, wenn wir jetzt noch von dem eben gewonnenen rechtwinkligen System zu dem unter II. vorgelegten übergehen.

Wir beziehen jetzt die Gleichungen (1) auf die beiden unter II. vorgelegten Systeme, von denen das ursprüngliche rechtwinklig sein sollte. Für die Richtungswinkel der neuen Achsen OX' , OY' , OZ' im alten System behalten wir die Bezeichnungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \dots; \alpha_3, \dots$ bei. Da dann eben wieder der Punkt $x' = 1, y' = 0, z' = 0$ im alten System die Koordinaten $\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1$ hat usw., so folgt: *Im Falle II. bleiben lineare Transformationsformeln der Gestalt (1) bestehen, in denen auch wieder die Koeffizienten a_1, \dots, c_3 die neun Richtungskosinus der neuen schiefwinkligen Achsen im alten Systeme sind.* Die Koeffizienten befriedigen nach (2) S. 94 und (3) S. 95 die Beziehungen:

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, \quad a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k = \cos w_i,$$

wenn w_1, w_2, w_3 die „*Achsenwinkel*“ des neuen Systems in der richtigen Reihenfolge bezeichnen.

Da man durch Kombination der besonderen hiermit besprochenen Transformationen unter Hinzunahme der Umkehrung von II. jedes kartesische Koordinatensystem in jedes andere überführen kann, so notieren wir den Satz: *Jede Transformation kartesischer Koordinaten wieder auf kartesische begründet zwischen den beiderseitigen Koordinatentripeln lineare Relationen der Gestalt (5).*

§ 55. Darstellung von Flächen durch Gleichungen.

Ist zwischen den Koordinaten x, y, z die Gleichung $z = 3x^2 - 7y + 4$ vorgeschrieben, so kann man die sämtlichen Punkte P , deren Koordinaten x, y, z diese Gleichung befriedigen, so konstruieren: Man wähle zuerst in der x, y -Ebene einen beliebigen Punkt Q der Koordinaten x, y und berechne für diese x, y aus der Gleichung das zugehörige z . Man errichte dann von Q parallel zur z -Achse nach der durch das Vorzeichen von z bestimmten Richtung die Strecke $QP = z$, deren Endpunkt P einen der gesuchten Punkte liefert. Da sich bei stetiger Änderung von x und y auch z stetig ändert, so werden sich, falls wir diese Konstruktion für alle Punkte Q der x, y -Ebene durchgeführt denken, die Streckenendpunkte P zu einer *Fläche* aneinanderreihen, die sich dann eben aus den gesamten, die vorgelegte Gleichung befriedigenden Punkten aufbaut.

In dieser Art ordnen wir unter Vorbehalt genauerer Untersuchung in besonderen Fällen allgemein einer Gleichung zwischen

kartesischen Koordinaten eine „*Fläche*“ zu, bestehend aus allen Punkten des Raumes, deren Koordinaten x, y, z die vorgelegte Gleichung befriedigen. Ist eine Fläche im Raume gegeben, so versuche man umgekehrt eine Gleichung zwischen den Koordinaten eines geeignet gewählten Systems aufzustellen, die von sich aus in vorstehender Weise zur Fläche hinführen würde. Man nennt dann die Gleichung den „*analytischen Ausdruck*“ der Fläche oder sagt, die Fläche sei durch die Gleichung „*analytisch dargestellt*“ oder kurz „*dargestellt*“.

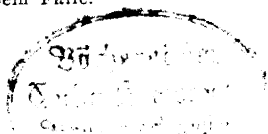
Entsteht die Gleichung einer Fläche durch Nullsetzen eines Aggregates, dessen einzelne Glieder neben konstanten Koeffizienten nur Potenzen der x, y, z mit ganzzahligen, nicht-negativen Exponenten enthalten, oder ist die Gleichung durch Umrechnung auf diese Gestalt reduzierbar, so heißt die Fläche eine „*algebraische*“. Die Summe der Exponenten von x, y, z im einzelnen Gliede heißt der „*Grad*“ des Gliedes; der höchste im Aggregat auftretende Grad heißt der „*Grad der Gleichung*“ und damit der „*Grad der dargestellten Fläche*“. Wie S. 12 bei den ebenen Kurven zeigt man, daß der Grad einer Fläche bei Ausübung einer Transformation der kartesischen Koordinaten erhalten bleibt. Jede nicht-algebraische Fläche wird als „*transzendent*“ bezeichnet.

§ 56. Beispiel der Zylinder- und Kegelflächen zweiten Grades.

In beliebigen Koordinaten sei eine Gleichung vorgelegt, in der eine der Koordinaten, etwa z , nicht auftritt, z. B. die Gleichung $y^2 - 2px = 0$, die in der x, y -Ebene eine Parabel darstellt¹⁾. Soll der Punkt P der Koordinaten x, y, z diese Gleichung befriedigen, so genügen x und y der Gleichung $y^2 - 2px = 0$, während z frei wählbar bleibt; d. h. jeder Punkt P der durch einen Punkt jener Parabel parallel zur z -Achse verlaufenden Raumgeraden genügt der Gleichung. Offenbar gilt allgemein: Kommt in einer Gleichung eine der Koordinaten, etwa z , nicht vor, so entsteht die Fläche, indem man eine zur z -Achse parallele, beiderseits unbegrenzte Gerade über diejenige Kurve hinführt, welche durch die Gleichung in der x, y -Ebene dargestellt wird. Die Fläche heißt eine „*Zylinderfläche*“, die fragliche, in der x, y -Ebene gelegene Kurve wird „*Leitkurve*“ genannt, und die die Fläche bildenden Geraden sind ihre „*Mantellinien*“.

Die Zylinderflächen zweiten Grades kann man entsprechend der Gestalt der Leitkurven näher einteilen. Die oben schon betrach-

1) Die am Anfang von § 55 befolgte Art der Flächenkonstruktion versagt in diesem Falle.



tete Gleichung $y^2 - 2px = 0$ stellt einen „*parabolischen Zylinder*“ dar, der in Fig. 85 (unter Gebrauch rechtwinkliger Koordinaten)

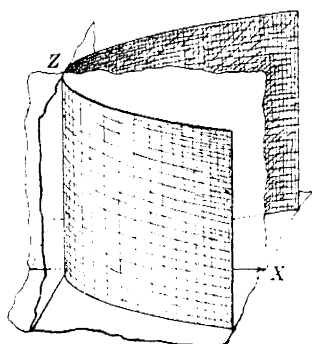


Fig. 85.

skizziert ist. Der gezeichnete Teil der Fläche ist natürlich über die beiden parabolischen Ränder nach oben und unten unbegrenzt fortzusetzen, ebenso über die beiden geraden Ränder entsprechend dem weiteren Verlaufe der Parabel. Den Ellipsen und Hyperbeln gehören analog die „*elliptischen*“ und „*hyperbolischen Zylinder*“ zu. Zerfällt die Leitkurve zweiten Grades in zwei reelle Gerade, so zerfällt der Zylinder zweiten Grades in zwei zur z -Achse parallele Ebenen. —

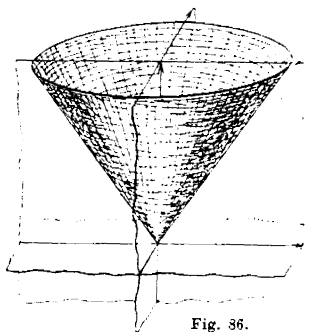
Entsteht die Gleichung einer Fläche durch Nullsetzen eines Aggregates von Gliedern, die in den Koordinaten alle einen und denselben Grad n haben, so nennt man die Gleichung *homogen vom n^{ten} Grade in den x, y, z* . Setzen wir in die linke Seite der Gleichung $\mu x, \mu y, \mu z$ an Stelle von x, y, z ein, unter μ einen beliebigen Multiplikator verstanden, so ändert sich die linke Seite nur um μ^n als Faktor. Dieselbe Eigenschaft kann auch der Gleichung einer transzendenten Fläche zukommen, wie das Beispiel:

$$xz - y^2 \cdot \sin\left(\frac{y}{x}\right) + 3z^2 = 0$$

zeigen möge, bei dem $n = 2$ zutrifft. Um die Gradbezeichnung auf die algebraischen Flächen allein zu beziehen, sagen wir allgemein, eine durch Nullsetzen irgendeines analytischen Ausdrucks entstehende Gleichung sei „*homogen von der n^{ten} Dimension*“, wenn die Eintragung von $\mu x, \mu y, \mu z$ an Stelle von x, y, z die linke Seite nur um den Faktor μ^n ändert.

Läßt man μ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so beschreibt der Punkt $(\mu x, \mu y, \mu z)$ die unbegrenzte durch O und den Punkt (x, y, z) festgelegte Gerade (S. 96). Da nun eine homogene Gleichung mit (x, y, z) offenbar auch durch $(\mu x, \mu y, \mu z)$ befriedigt wird, so enthält die dargestellte Fläche mit irgendeinem Punkte (x, y, z) stets gleich die unbegrenzte Gerade durch O und (x, y, z) . Zur Konstruktion der Fläche bietet sich demnach folgender Weg: Man lege etwa oberhalb der x, y -Ebene eine zu dieser Koordinatenebene parallel verlaufende Ebene. Alle Punkte dieser Ebene haben als dritte Koordinate z einen und denselben positiven Wert, etwa c , und erschöpfen zugleich alle Raumpunkte mit $z = c$. Die gesamten Punkte (x, y, c) der Schnittkurve der

fraglichen Ebene mit der durch die homogene Gleichung gelieferten Fläche befriedigen die Gleichung in x, y , welche aus der vorgelegten Gleichung durch Eintragung des Wertes $z = c$ entsteht. *Die Fläche selbst besteht nun einfach aus allen beiderseits unbegrenzten Geraden, welche den Nullpunkt O mit den Punkten jener Kurve verbinden.* Die Fläche wird als eine „Kegelfläche“ bezeichnet, die in der konstruierten Ebene gelegene Schnittkurve dient bei Herstellung der Fläche als „Leitkurve“, und die die Fläche zusammensetzenden Geraden sind ihre „Mantellinien“, während O der „Scheitelpunkt“ des Kegels heißt.



Als Beispiel ist bei Gebrauch rechtwinkliger Koordinaten in Fig. 86 derjenige „Kegel zweiten Grades“ skizziert, welcher in der durch $z = c$ festgelegten Ebene die durch:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

gegebene Ellipse zur Leitkurve hat; natürlich ist die Fläche nach oben über den elliptischen Rand und nach unten über den Scheitelpunkt hinaus unbegrenzt fortzusetzen. *Die Gleichung dieses Kegels zweiten Grades ist:*

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

denn hierdurch ist in der Tat der Kegel gegeben, welcher jene Ellipse zur Leitkurve hat. Man beachte, daß die durch $y = b$ charakterisierte Parallelebene zur x, z -Ebene, wie man durch Eintragen von $y = b$ in (1) findet, den Kegel in der durch:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$$

gegebenen Hyperbel schneidet. Endlich schneidet, wie wir ohne analytischen Beweis angeben, eine nicht durch O laufende, zu irgendeiner Mantellinie parallele Ebene den Kegel in einer Parabel. Es ist demnach möglich, *einen und denselben Kegel zweiten Grades sowohl mittels einer Ellipse als auch einer Hyperbel, sowie endlich auch einer Parabel als Leitkurve herzustellen*, zum Unterschiede gegenüber den bei den Zylindern zweiten Grades vorliegenden Verhältnissen (s. hierzu Fig. 34. S. 33 und den zugehörigen Text). Artet übrigens die Leitkurve zweiten Grades in zwei reelle Gerade aus, *so zerfällt der Kegel zweiten Grades selbst in zwei durch O hindurchlaufende Ebenen.*

§ 57. Darstellung der Raumkurven durch Gleichungen. Beispiel der Schraubenlinie.

Zwei einander schneidende Flächen seien durch ihre Gleichungen in einem beliebig gewählten kartesischen Systeme dargestellt. Ihre „Durchdringungs- oder Schnittkurve“ besteht aus allen Punkten, deren Koordinaten x, y, z die beiden Flächengleichungen zugleich befriedigen. Im Gegensatze zu den im I. Teile betrachteten Kurven spricht man hier von einer „Raumkurve“, deren analytische Darstellung durch das gleichzeitige Gelften der beiden Gleichungen in x, y, z geleistet werden kann. Stellen die beiden Gleichungen einzelne algebraische Flächen dar, so heißt auch die Raumkurve „algebraisch“; das Produkt der Grade der Flächen bezeichnet man als den „Grad“ der Raumkurve, so daß z. B. die Durchdringungskurve zweier Flächen zweiten Grades eine „Raumkurve vierten Grades“ ist.

Eine zweite Art der Darstellung einer Raumkurve mittels einer zu den x, y, z tretenden vierten variablen Größe, eines sogenannten „Parameters“, werde sogleich an einem Beispiele erläutert. Man wähle rechtwinklige Koordinaten und lasse eine zur z -Achse parallele unbegrenzte Gerade mit konstanter Geschwindigkeit fortwährend die Mantelfläche des durch $x^2 + y^2 = 1$ gegebenen „geraden Kreiszylinders“ umlaufen, etwa in der Richtung, daß der Schnittpunkt Q der Geraden mit der x, y -Ebene den „Leitkreis“ des Zylinders entgegengesetzt der Drehungsrichtung des Uhrzeigers beschreibt. Auf der Geraden soll sich zugleich ein Punkt P mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung wachsender Werte z bewegen. Die von P beschriebene Raumkurve heißt eine „zylindrische Schraubenlinie“; der Betrag h , um den sich die Ordinate z von P vergrößert, falls die Gerade einen vollen Umlauf auf dem Zylinder ausführt, wird die „Ganghöhe“ der Schraubenlinie genannt.

Zur Darstellung der Schraubenlinie führen wir als vierte veränderliche Größe t die Länge des vom Punkte Q auf dem Leitkreise des Zylinders zurückgelegten Bogens ein. Wir nehmen die Maßzahl $t = 0$ in einem Augenblicke, wo Q den Punkt $x = 1, y = 0$ des Kreises durchläuft. Da Q bis zu diesem Augenblicke schon beliebig oft umgelaufen sein mag und noch weiter beliebig oft umlaufen soll, so denken wir t als eine veränderliche Größe, die nach seiten sowohl ihrer negativen wie ihrer positiven Werte unbegrenzt ist. Die Maßzahl t liefert uns zugleich das „Bogenmaß“ des Winkels, den der Radius OQ mit der positiven x -Achse bildet, wobei dann natürlich zwei Werte von t , die um ein Multipulum von 2π verschieden sind, ein und denselben Winkel liefern;

auch kann t , da die Umlaufgeschwindigkeit konstant sein sollte, als „Zeitmaß“ gelten.

Setzen wir jetzt noch fest, daß der Punkt P im „Augenblick“ $t = 0$ die x, y -Ebene durchschreiten soll, so wird die „Parameterdarstellung“ der Schraubenlinie durch die drei Gleichungen:

$$(1) \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = at$$

geleistet, wobei die trigonometrischen Funktionen als solche des Bogenmaßes vom Winkel $\sphericalangle QOX$ geschrieben sind und a eine konstante Größe ist. Da für $t = 2\pi$ die Koordinate $z = h$, d. i. gleich der „Ganghöhe“ der Schraubenlinie wird, so können wir an Stelle von (1) auch setzen:

$$(2) \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \frac{h}{2\pi} t.$$

Eliminiert man t zwischen zweien dieser drei Gleichungen, so entsteht eine Gleichung zwischen zwei Variablen, welche für alle Punkte der Kurve richtig ist. Nach S. 101 stellt diese Gleichung eine Zylinderfläche dar, auf welcher die Schraubenlinie gelegen ist: offenbar kann man diesen Zylinder einfach dadurch konstruieren, daß man die Schraubenlinie als „Leitkurve“ benutzt und die Mantellinien parallel zu der in Betracht kommenden Koordinatenachse laufen läßt. Die Elimination von t aus den beiden ersten Gleichungen (2) liefert natürlich wieder den Kreiszylinder $x^2 + y^2 = 1$. Neu dagegen sind die beiden durch die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= \cos \frac{2\pi z}{h}, \\ y &= \sin \frac{2\pi z}{h} \end{aligned}$$

dargestellten „transzendenten Zylinderflächen“. In Fig. 87 ist ein Teil der Schraubenlinie skizziert, wie sie sich angenähert von

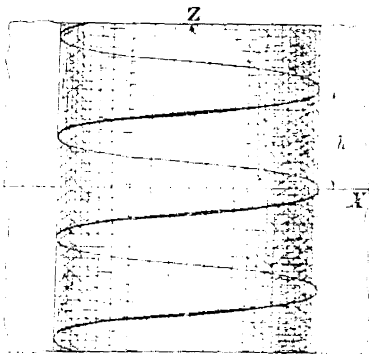


Fig. 87

einem weit entfernten Punkte der negativen y -Achse darstellt. Die in der Papierebene tatsächlich gezeichnete Kurve ist die der ersten Gleichung (3) entsprechende sogenannte „Sinuslinie“.

Kap. VII. Die Ebenen, die Geraden und die Kugeln.

§ 58. Darstellung der Ebenen in kartesischen Koordinaten.

Es sei in beliebigen Koordinaten eine Gleichung ersten Grades:

$$(1) \quad ax + by + cz = d$$

vorgelegt, die wir auch als eine „lineare“ Gleichung benennen. Die Koeffizienten a, b, c, d seien irgendwelche endliche Konstante; doch sollen a, b, c nicht zugleich verschwinden, da sonst die Gleichung (1) entweder identisch besteht (für $d = 0$) oder durch keinen einzigen endlichen Punkt (x, y, z) erfüllbar ist (für $d \neq 0$). Es gilt der Satz: *Die durch (1) dargestellte Fläche ist eine Ebene.* Verschwindet nämlich einer der Koeffizienten a, b, c , etwa c , so haben wir nach S. 101 einen „Zylinder ersten Grades“ mit zur z -Achse parallelen Mantellinien und der durch $ax + by = d$ gegebenen Leitgeraden; dieser „Zylinder“ ist aber eine zur z -Achse parallele Ebene. Sind die Koeffizienten a, b, c von 0 verschieden, so übe man die durch $x = x', y = y', z = z' + \frac{d}{c}$ gegebene Parallelverschiebung der Achsen in Richtung der z -Achse aus und findet als transformierte Gleichung (1):

$$ax' + by' + cz' = 0.$$

Nach S. 103 ist die Fläche jetzt als „Kegel ersten Grades“ mit dem Scheitelpunkt O' und etwa der Leitgeraden $ax' + by' + cz' = 0$ aufzufassen, welche in der durch $z' = 1$ charakterisierten Parallelebene zur x', y' -Ebene gelegen ist. Wir gelangen also zu der durch diese Gerade und den außerhalb derselben gelegenen Punkt O' bestimmten Ebene.

Da man diese Betrachtungen bei beliebig vorgelegter Ebene leicht umkehrt, so gilt der Satz: *Jede Ebene des Raumes ist durch eine lineare Gleichung (1) mit nicht durchgängig verschwindenden Koeffizienten a, b, c darstellbar, und jede solche Gleichung stellt eine Ebene dar, so daß die Ebenen die „algebraischen Flächen ersten Grades“ erschöpfen.*

Folgende Spezialfälle seien genannt: Verschwindet d , so läuft die Ebene durch den Nullpunkt. Verschwindet einer der Koeffizienten a, b, c , so läuft die Ebene parallel zu der in Betracht kommenden Koordinatenachse. Verschwinden endlich zwei unter den Koeffizienten a, b, c , so läuft die Ebene parallel zu einer Koordinatenebene. Auch die Umkehrungen dieser Sätze gelten.

§ 59. Die Normalgleichungen der Ebene.

Die Gleichung (1) § 58 nennen wir „allgemeine Gleichung“ der Ebene. Durch Zusatz geeigneter endlicher und nicht verschwindender Faktoren entstehen die „Normalgleichungen“ der Ebene.

I. Erste Normalgleichung einer nicht durch O laufenden Ebene.

Da $d \neq 0$ ist, so sind die drei Quotienten:

$$\frac{d}{a} = l, \quad \frac{d}{b} = m, \quad \frac{d}{c} = n$$

von 0 verschieden; sie können im speziellen auch ∞ sein, jedoch nicht alle drei zugleich. Die Multiplikation der Gleichung (1) § 58 mit d^{-1} liefert die „erste Normalgleichung“ der Ebene:

$$(1) \quad \frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1.$$

Ist l endlich, so genügt der Punkt $(l, 0, 0)$ der Gleichung (1). Wir finden: Die Größen l, m, n sind die Koordinaten x bzw. y und z der Schnittpunkte der Ebene mit den Achsen. Auch der Fall unendlich großer Werte l, m, n ist sofort verständlich: ist z. B. $n = \infty$, so läuft die Ebene parallel zur z -Achse, so daß die Koordinate des Schnittpunktes der Ebene mit dieser Achse in der Tat ∞ ist.

II. Zweite Normalgleichung einer Ebene bei rechtwinkligen¹⁾ Koordinaten.

Läuft die Ebene nicht durch O hindurch, so habe das Lot von O auf die Ebene die Länge p und die Richtungswinkel α, β, γ . Der Nullpunkt, irgendein Punkt (x, y, z) der Ebene und der Lotfußpunkt $(p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma)$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem letzten Punkte als Scheitelpunkte des rechten Winkels. Demnach gilt (2) S. 93):

$$x^2 + y^2 + z^2 = ((x - p \cos \alpha)^2 + (y - p \cos \beta)^2 + (z - p \cos \gamma)^2) + p^2$$

oder nach einfacher Umrechnung unter Benutzung von (2) S. 94:

$$(2) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Läuft die Ebene durch O hindurch, so errichte man in O auf ihr nach der einen oder anderen Seite ein Lot der Länge 1, dessen Richtungswinkel wieder α, β, γ seien. Bei Wechsel der Lotrichtung werden α, β, γ zugleich durch ihre Nebenwinkel ersetzt. Jetzt bilden O , irgendein Punkt (x, y, z) der Ebene und der Lotendpunkt $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ein rechtwinkliges Dreieck mit O als Scheitel des rechten Winkels. Also gilt:

1) Diese besondere Voraussetzung dient der Vereinfachung der folgenden Formeln.

$$(x^2 + y^2 + z^2) + 1 = (x - \cos \alpha)^2 + (y - \cos \beta)^2 + (z - \cos \gamma)^2$$

oder nach einfacher Umrechnung:

$$(3) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0,$$

eine Gleichung, die sich der Gleichung (2) für $p = 0$ unterordnet. In (2) bzw. (3) haben wir die „zweite Normalgleichung“ der Ebene vor uns; sie ist eindeutig bestimmt, wenn die Ebene nicht durch O läuft, dagegen zweideutig, wenn O auf der Ebene liegt, wobei jedoch die beiden Gestalten der Gleichung durch Zeichenwechsel der linken Seiten ineinander übergehen.

Wird die allgemeine Gleichung (1) § 58 durch Zusatz des Faktors σ in die zweite Normalgleichung übergeführt, so gilt:

$$(4) \quad \sigma a = \cos \alpha, \quad \sigma b = \cos \beta, \quad \sigma c = \cos \gamma, \quad \sigma d = p.$$

Durch Quadrieren und Addieren der drei ersten Gleichungen folgt bei Benutzung von (2) S. 94:

$$\sigma^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

und also, da $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ gilt:

$$(5) \quad \sigma = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Das Vorzeichen bleibt für $d = 0$ frei wählbar, entsprechend den beiden Gestalten der zweiten Normalgleichung; für $d \neq 0$ muß $\sigma d = p > 0$ sein, so daß dann:

$$(6) \quad \sigma = \frac{\operatorname{sgn}(d)}{+\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

der zur zweiten Normalgleichung führende Zusatzfaktor ist. Man merke noch an: Das Lot p und damit die Entfernung des Nullpunktes O von der durch (1) § 58 gegebenen Ebene ist:

$$(7) \quad p = \sigma d = \frac{d \cdot \operatorname{sgn}(d)}{+\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d}{+\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

§ 60. Abstand eines Punktes von einer Ebene.

Um den Abstand q des Punktes (x_0, y_0, z_0) von der durch (1) § 58 gegebenen Ebene, d. i. die Länge des Lotes vom Punkte auf die Ebene, bei Gebrauch rechtwinkliger Koordinaten zu berechnen, üben wir die Parallelverschiebung $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, $z = z' + z_0$ der Achsen auf den Punkt (x_0, y_0, z_0) als neuen Nullpunkt O' aus, wobei die Gleichung der Ebene übergeht in:

$$ax' + by' + cz' = d', \quad d' = d - ax_0 - by_0 - cz_0.$$

Aus (7) § 59 folgt somit: *Der Abstand des Punktes (x_0, y_0, z_0) von der durch die Gleichung:*

$$(1) \quad ax + by + cz - d = 0$$

gegebenen Ebene ist:

$$(2) \quad q = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

wird also gewonnen, indem man in die linke Seite der Gleichung (1) die Koordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes einträgt und den sich ergebenden Wert, absolut genommen, durch $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ teilt.

§ 61. Neigungswinkel zwischen zwei Ebenen

Zwei Ebenen seien in *rechtwinkligen* Koordinaten durch:

$$(1) \quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

gegeben. Schneiden sich diese Ebenen, so bezeichnen wir mit δ die eindeutig bestimmte Maßzahl eines ihrer Neigungswinkel, der nicht größer als ein rechter ist. Zur Berechnung von δ errichten wir in einem Punkte der Schnittgeraden die beiden zu den Ebenen senkrecht verlaufenden unbegrenzten Geraden, deren vier zu Paaren gleiche Winkel gleich δ und $(180^\circ - \delta)$ sind. Zu diesen beiden Geraden laufen die Lote von O auf die Ebenen¹⁾ parallel, so daß der Winkel zwischen diesen beiden Loten gleich δ oder $(180^\circ - \delta)$ ist. Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungswinkel dieser Lote, so gilt nach (3) S. 95:

$$(2) \quad \cos \delta = |\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2|.$$

Mit Benutzung von (4) und (5) § 59 ergibt sich: *Der mit δ bezeichnete Neigungswinkel der beiden Ebenen (1) stellt sich in den Koeffizienten der Gleichungen so dar:*

$$(3) \quad \cos \delta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Ist δ ein rechter Winkel, so heißen die Ebenen *orthogonal*: das Kennzeichen orthogonaler Ebenen ist:

$$(4) \quad a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Sind die Ebenen parallel, so sind die wie oben zu erklärenden Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ entweder den Winkeln $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oder ihren Nebenwinkeln bzw. gleich. Die zweiten Normalgleichungen der Ebenen stimmen also, abgesehen von den Absolutgliedern, überein oder die eine geht durch Zusatz des Faktors -1 , abgesehen von

1) Falls die einzelne Ebene durch O hindurchläuft, so ist auf ihr das Lot in O zu errichten.

den Absolutgliedern, in die andere über. Da die Gleichungen (1) von den Normalgleichungen nur um Faktoren σ_1 und σ_2 (vgl. (5) bzw. (6) S. 108) abweichen, so folgt leicht: Kennzeichen paralleler Ebenen ist die Proportion:

$$(5) \quad a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2;$$

die eine Gleichung läßt sich durch Zusatz eines Faktors so umgestalten, daß sie mit der anderen, abgesehen von den Absolutgliedern, übereinstimmt. Die Gleichungen (2) und (3) bleiben in Gültigkeit, indem sie $\cos \delta = 1$ und also $\delta = 0^\circ$ liefern.

§ 62. Dreiecks- und Tetraederinhalt.

Zwei Punkte P_1, P_2 der *rechtwinkligen* Koordinaten x_i, y_i, z_i mögen voneinander und von O verschieden sein und sollen *nicht* mit O auf *einer* Geraden liegen. Dann bilden O, P_1, P_2 ein Dreieck nicht-verschwindenden Inhaltes D , den wir aus den x_i, y_i, z_i berechnen wollen. Der Punkt P_i möge den Radiusvektor r_i von den Richtungskosinus a_i, b_i, c_i haben, welche sich nach (1) § 51 zu:

$$(1) \quad a_i = \frac{x_i}{r_i}, \quad b_i = \frac{y_i}{r_i}, \quad c_i = \frac{z_i}{r_i}, \quad (i = 1, 2)$$

bestimmen. Bezeichnen wir mit ϑ den Winkel zwischen r_1 und r_2 , so ist $2D = r_1 r_2 \sin \vartheta$, wobei sich $\sin \vartheta$ nach (4) S. 95 berechnet. Unter Eintragung der Werte (1) der Richtungskosinus ergibt sich als *Ausdruck des doppelten Dreiecksinhaltes in den Koordinaten* x_i, y_i, z_i :

$$(2) \quad 2D = +V(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

Ein dritter Punkt P_3 der Koordinaten x_3, y_3, z_3 liege nicht in der Ebene des Dreiecks. Dann bilden die vier Punkte O, P_1, P_2, P_3 die Ecken eines Tetraeders mit nicht-verschwindendem Inhalt T , den wir gleichfalls in den x_i, y_i, z_i darstellen wollen. Die Ebene des eben betrachteten Dreiecks hat zur Gleichung:

$$(3) \quad x(y_1 z_2 - y_2 z_1) + y(z_1 x_2 - z_2 x_1) + z(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0;$$

denn diese Gleichung stellt, da der Radikand in (2) größer als 0 ist und also die Koeffizienten von x, y, z in (3) nicht zugleich verschwinden, eine Ebene dar; und offenbar wird die Gleichung (3) durch die Koordinaten von O, P_1 und P_2 befriedigt. Für den Abstand h des Punktes P_3 von dieser Ebene ergibt sich aus (2), § 60, S. 109:

$$h = \frac{x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) + y_3(z_1 x_2 - z_2 x_1) + z_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{2D}.$$

Nun ist aber nach einer Elementarregel $3T = Dh$; es gilt also:

$$(4) \quad \pm 6T = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2.$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens nehmen wir eine gleich näher zu bezeichnende stetige Drehung des Tetraeders um O ohne Gestaltsänderung desselben vor. Dabei ändern sich die Glieder des Aggregates in (4) rechts stetig; ihre Summe kann sich demnach auch nur stetig ändern. Da aber der von 0 verschiedene Wert der Summe entweder gleich $+6T$ oder gleich $-6T$ ist, und ein Wechsel unter beiden Werten eine unstetige Änderung sein würde, so ist der Summenwert während der ganzen Drehung entweder nur gleich $+6T$ oder nur gleich $-6T$. Durch die Drehung möge nun P_1 auf die positive x -Achse verlegt werden, P_2 aber in der Art auf die x, y -Ebene, daß $y_2 > 0$ wird. Da jetzt $x_1 > 0$, $y_1 = z_1 = 0$, $y_2 > 0$, $z_2 = 0$ geworden ist, so gilt:

$$\pm 6T = x_1 y_2 z_3,$$

so daß das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $z_3 > 0$ oder < 0 ist. Bei Übertragung einer auf die Achsenkreuze bezogenen Bezeichnungsweise finden wir: *Der sechsfache Inhalt des Tetraeders der Ecken O, P_1, P_2, P_3 ist durch die Gleichung (4) gegeben, wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Radienvektoren OP_1, OP_2, OP_3 in dieser Anordnung ein „Rechtssystem“ oder ein „Linkssystem“ bilden.*

§ 63. Darstellung der Geraden in kartesischen Koordinaten.

Zwei nicht-parallele Ebenen, gegeben durch:

$$(1) \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1 = 0, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2 = 0$$

schneiden sich in einer Geraden, die nach S. 104 durch das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen (1) dargestellt ist. Ist umgekehrt eine Gerade im Raume gegeben, so legen wir durch dieselbe zwei verschiedene Ebenen, durch deren Gleichungenpaar (1) die Gerade dargestellt wird.

Sind m_1, m_2 irgend zwei endliche, nicht zugleich verschwindende Faktoren, so wird die lineare Gleichung:

$$(2) \quad m_1(a_1 x + b_1 y + c_1 z - d_1) - m_2(a_2 x + b_2 y + c_2 z - d_2) = 0$$

durch jeden Punkt der Geraden erfüllt. Andererseits besteht sie nicht etwa identisch; denn gilt z. B. $m_1 \neq 0$, so ist die Gleichung für irgendeinen nicht auf der Geraden gelegenen Punkt der zweiten Ebene nicht erfüllt. Nach S. 106 stellt also (2) für jedes Faktorenpaar m_1, m_2 eine Ebene dar, die, wie schon festgestellt ist, unsere Gerade enthält. Irgendeine die Gerade enthaltende Ebene kann man durch die Forderung bestimmen, daß sie durch den nicht auf der Geraden gelegenen Punkt (x_0, y_0, z_0) hindurchläuft. Dann sind die beiden Werte:

$$m_1 = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 - d_2, \quad m_2 = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 - d_1$$

jedenfalls nicht zugleich gleich 0; für diese m_1, m_2 aber läuft die Ebene (2) durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) . Also können wir jede durch die Gerade hindurchlaufende Ebene in der Gestalt (2) darstellen.

§ 64. Die Normalgleichungen der Geraden.

Durch zweckmäßige Auswahl der beiden sich in der darzustellenden Geraden schneidenden Ebenen gelangt man zu „Normalgleichungen“ der Geraden.

I. Erstes System der Normalgleichungen einer Geraden, die nicht zur y, z -Ebene parallel läuft.¹⁾

Da die Gerade alsdann weder zur z -Achse noch zur y -Achse parallel läuft, so gibt es zwei eindeutig bestimmte Ebenen durch die Gerade, deren erste zur z -Achse und deren zweite zur y -Achse parallel läuft.²⁾ Die Gleichungen dieser Ebenen haben die Gestalt (S. 106):

$$a_1 x + b_1 y = d_1, \quad a_2 x + c_2 z = d_2,$$

wobei b_1 und c_2 von 0 verschieden sind, da andernfalls die Gerade der Voraussetzung zuwider in einer der y, z -Ebene parallelen Ebene liegen würde. Demgemäß sind:

$$-\frac{a_1}{b_1} = \kappa, \quad \frac{d_1}{b_1} = \lambda, \quad -\frac{a_2}{c_2} = \mu, \quad \frac{d_2}{c_2} = \nu$$

vier endliche Zahlen, und man gewinnt von jenen beiden Ebenen aus die Normalgleichungen der Geraden:

$$(1) \quad y = \kappa x + \lambda, \quad z = \mu x + \nu.$$

II. Zweites System der Normalgleichungen einer Geraden oder „Zweipunktform“ der Geradengleichungen.

Läuft die Gerade zu keiner Koordinatenebene parallel, und sind (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) zwei verschiedene Punkte der Geraden, so kann weder $x_1 = x_2$ noch $y_1 = y_2$ noch auch $z_1 = z_2$ zutreffen. Die „Zweipunktform“ der Geradengleichungen ist:

$$(2) \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Diese „dreigliedrige“ Gleichung ersetzt nämlich zwei lineare Gleichungen, deren jede durch die beiden Punkte (x_i, y_i, z_i) erfüllt wird.

Ist die Gerade zu einer Koordinatenebene, etwa der x, y -Ebene, parallel, so tritt an Stelle von (2) das Paar:

$$(3) \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad z = z_1.$$

1) Damit soll auch ausgeschlossen sein, daß die Gerade in der y, z -Ebene liegt.

2) Wird die z -Achse von der Geraden geschnitten, so ist die durch diese beiden Geraden festgelegte Ebene gemeint. S. übrigens die Betrachtung am Anfang von § 66, S. 115.

Ist sie zu *zwei* Koordinatenebenen und damit zu einer Achse, etwa der z -Achse, parallel, so hat man anstatt (2) die Gleichungen:

$$(4) \quad x = x_1, \quad y = y_1.$$

III. Drittes System der Normalgleichungen einer Geraden bei rechtwinkligen Koordinaten.

Eine vom Nullpunkt O eines *rechtwinkligen* Koordinatensystems ausziehende Gerade habe die Richtungswinkel α, β, γ . Die Koordinaten ihrer Punkte sind $x = r \cos \alpha, y = r \cos \beta, z = r \cos \gamma$, wo r von 0 bis ∞ zu wachsen hat, wenn der Punkt (x, y, z) die Gerade beschreiben soll ((1) S. 96). Die Verlängerung der Geraden von O nach der anderen Seite ins Unendliche liefert weiter die Punkte $(-r \cos \alpha, -r \cos \beta, -r \cos \gamma)$. Es wird also der Punkt der Koordinaten:

$$(5) \quad x = t \cos \alpha, \quad y = t \cos \beta, \quad z = t \cos \gamma$$

die beiderseits unbegrenzte Gerade beschreiben, wenn t von $-\infty$ bis $+\infty$ wandert.

Eine durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) hindurchlaufende, mit einer Pfeilrichtung versehene Gerade habe gegen die positiven Achsen die „Richtungsunterschiede“ α, β, γ . Übt man die durch $x = x' + x_0, y = y' + y_0, z = z' + z_0$ gegebene Parallelverschiebung der Achsen aus, so gilt im neuen System $x' = t \cos \alpha, y' = t \cos \beta, z' = t \cos \gamma$ für die Punkte der Geraden; also beschreibt im ursprünglichen System der durch:

$$(6) \quad x = x_0 + t \cos \alpha, \quad y = y_0 + t \cos \beta, \quad z = z_0 + t \cos \gamma$$

gegebene Punkt die Gerade, falls wieder t von $-\infty$ bis $+\infty$ wandert. In (6) und (5) ist eine „*Parameterdarstellung*“ der Geraden gewonnen (S. 104).

Ist die Gerade zu keiner Koordinatenebene parallel, so sind ihre Richtungskosinus von 0 verschieden. Dann folgt aus (6) durch Elimination von t :

$$(7) \quad \frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}$$

als in Aussicht genommenes *System von Normalgleichungen*. Der Punkt (x_0, y_0, z_0) ist auf der Geraden frei wählbar; dagegen sind die Richtungskosinus durch die Gerade eindeutig bestimmt bis auf einen gemeinsamen Zeichenwechsel, der bei Änderung der Pfeilrichtung eintritt. —

Wählen wir als Punkt (x_0, y_0, z_0) insbesondere den Schnittpunkt der Geraden mit der y, z -Ebene, so gilt $x_0 = 0$, und man findet aus (7):

$$y = \left(\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right) x + y_0, \quad z = \left(\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \right) x + z_0.$$

womit wir die Gleichungen (1) wieder gewonnen haben. Wir ergänzen die Betrachtung der Normalgleichungen (1) durch den Satz: Die Bedeutung der Absolutglieder λ, ν ist die, daß $(0, \lambda, \nu)$ der Schnittpunkt der Geraden mit der y, z -Ebene ist; im Falle rechtwinkliger Koordinaten gilt für κ und μ die Proportion:

$$(8) \quad 1 : \kappa : \mu = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$$

so daß κ und μ als die „Richtungskoeffizienten“ der Gleichungen (1) zu bezeichnen sind.

§ 65. Abstand eines Punktes von einer Geraden.

In *rechtwinkligen* Koordinaten sei eine Gerade durch:

$$(1) \quad y = \kappa x + \lambda, \quad z = \mu x + \nu$$

gegeben¹⁾. Die zur Geraden senkrechte Ebene durch O hat zur Gleichung:

$$(2) \quad x + \kappa y + \mu z = 0;$$

denn das in O auf dieser Ebene errichtete Lot hat zufolge der zweiten Normalgleichung (3) S. 108 zu 1, κ, μ proportionale Richtungskosinus, läuft also zufolge (8) § 64 zur gegebenen Geraden parallel.

Der Schnittpunkt der Ebene (2) mit der Geraden (1) ist der Fußpunkt des Lotes von O auf die Gerade; die Lotlänge p gibt den Abstand des Nullpunktes O von der Geraden an. Nun findet man die Koordinaten x, y, z jenes Fußpunktes durch Auflösung der Gleichungen (1) und (2) nach x, y, z ; insbesondere ergibt sich:

$$x = - \frac{\kappa \lambda + \mu \nu}{1 + \kappa^2 + \mu^2},$$

während y und z durch Eintragen dieses Wertes x in die Gleichungen (1) gewonnen werden. Für den Radiusvektor p des fraglichen Punktes (x, y, z) folgt:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{x^2 + (\kappa x + \lambda)^2 + (\mu x + \nu)^2} \\ &= \sqrt{x^2 (1 + \kappa^2 + \mu^2) + 2x(\kappa \lambda + \mu \nu) + \lambda^2 + \nu^2}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung des eben berechneten Wertes von x erhält man den Satz: Der Abstand p des Nullpunktes O von der durch (1) gegebenen Geraden ist:

$$(3) \quad p = \sqrt{\frac{(\kappa \nu - \lambda \mu)^2 + \lambda^2 + \nu^2}{1 + \kappa^2 + \mu^2}}.$$

¹⁾ Das Koordinatensystem ist also so gewählt, daß die y, z -Ebene nicht zur Geraden parallel ist.

Um daraufhin den Abstand q eines beliebigen Punktes (x_0, y_0, z_0) von der Geraden (1) zu berechnen, üben wir, wie üblich, die Parallelverschiebung $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, $z = z' + z_0$ aus und finden in den neuen Koordinaten an Stelle von (1) die Gleichungen:

$$y' = \kappa x' + (\lambda + \kappa x_0 - y_0), \quad z' = \mu x' + (\nu + \mu x_0 - z_0).$$

Die Gleichung (3) liefert nach kurzer Rechnung den Satz: Der Abstand q des Punktes (x_0, y_0, z_0) von der Geraden (1) ist:

$$(4) \quad q = \sqrt{\frac{(\kappa \nu - \lambda \mu + \mu y_0 - \kappa z_0)^2 + (\lambda + \kappa x_0 - y_0)^2 + (\nu + \mu x_0 - z_0)^2}{1 + \kappa^2 + \mu^2}}.$$

§ 66. Kürzester Abstand zweier nicht-paralleler Geraden.

In rechtwinkligen Koordinaten seien zwei nicht-parallele Gerade durch die Gleichungspaare:

$$(1) \quad \begin{cases} y = \kappa_1 x + \lambda_1, & z = \mu_1 x + \nu_1, \\ y = \kappa_2 x + \lambda_2, & z = \mu_2 x + \nu_2 \end{cases}$$

gegeben¹⁾. Der kürzeste Abstand q eines Punktes der ersten Geraden von einem solchen der zweiten soll berechnet werden.

Wir nennen die Geraden kurz G_1 und G_2 , wählen auf ihnen zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 und legen durch P_1 eine Parallele zu G_2 und durch P_2 eine Parallele zu G_1 . Damit gewinnen wir zwei Winkel mit parallelen Schenkeln, die zwei Parallelebenen E_1 und E_2 festlegen, von denen die eine G_1 und die andere G_2 enthält (Fig. 88). Weiter errichte man längs G_1 eine zu E_1 senkrechte Ebene, welche (da G_1 und G_2 nicht parallel sind) G_2 in einem endlichen Punkt P schneidet. Das Lot PQ von P auf E_1 trifft mit seinem Fußpunkt Q die Gerade G_1 , steht auf beiden Geraden senkrecht und ergibt in $q = PQ$ den kürzesten Abstand der Geraden, der zugleich der senkrechte Abstand der Parallelebenen E_1, E_2 ist; denn jede andere Verbindungsgerade zweier Punkte von G_1 und G_2 verläuft nicht senkrecht zu E_1 und E_2 und hat demnach eine Länge $> q$.

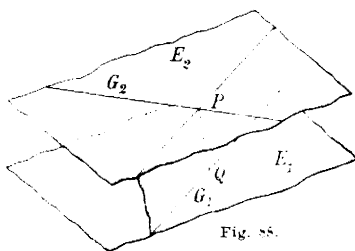


Fig. 88.

Bezeichnen wir mit a, b, c die Richtungskosinus des Lotes PQ , so gilt, da dasselbe zu G_1 und G_2 senkrecht verläuft, zufolge (3) S. 95 und (8) S. 114:

¹⁾ S. die Note zu § 65.

$$a + \kappa_1 b + \mu_1 c = 0, \quad a + \kappa_2 b + \mu_2 c = 0,$$

und man findet durch Auflösung nach den Verhältnissen der a, b, c :

$$a : b : c = (\kappa_1 \mu_2 - \kappa_2 \mu_1) : (\mu_1 - \mu_2) : (\kappa_2 - \kappa_1).$$

Die Ebene E_1 , als senkrecht zu PQ verlaufend, ist durch:

$$(\kappa_1 \mu_2 - \kappa_2 \mu_1)x + (\mu_1 - \mu_2)y + (\kappa_2 - \kappa_1)z = d$$

darstellbar, wobei man das noch unbekannte Absolutglied d aus der Bedingung bestimme, daß E_1 den Punkt $(0, \lambda_1, \nu_1)$ enthält:

$$(2) \quad (\kappa_1 \mu_2 - \kappa_2 \mu_1)x + (\mu_1 - \mu_2)(y - \lambda_1) + (\kappa_2 - \kappa_1)(z - \nu_1) = 0.$$

Die gesuchte Größe q kann man nun auch als Abstand des in E_2 gelegenen Punktes $(0, \lambda_2, \nu_2)$ von der Ebene E_1 ansehen und findet demnach auf Grund von (2) § 60, S. 109, den Satz: *Der kürzeste Abstand q der beiden durch (1) gegebenen nicht-parallelen Geraden ist:*

$$(3) \quad q = \left| \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)(\nu_1 - \nu_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(\kappa_1 \mu_2 - \kappa_2 \mu_1)^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + (\kappa_1 - \kappa_2)^2}} \right|.$$

Als besonderer Fall ergibt sich: *Die beiden durch (1) dargestellten nicht-parallelen Geraden werden sich stets und nur dann im Raume treffen, wenn die Bedingung besteht:*

$$(4) \quad (\kappa_1 - \kappa_2)(\nu_1 - \nu_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2).$$

§ 67. Gleichung der Kugel in rechtwinkligen Koordinaten.

Um bei Gebrauch *rechtwinkliger* Koordinaten eine Kugel (d. i. eine Kugeloberfläche) vom Radius q und vom Mittelpunkte (a, b, c) durch eine Gleichung darzustellen, beachte man, daß die Kugel aus der Gesamtheit der Punkte (x, y, z) besteht, die vom Punkte (a, b, c) den Abstand q haben. Aus (2) S. 93 folgt damit: *Die Gleichung der Kugel mit dem Radius q und dem Mittelpunkte (a, b, c) ist in rechtwinkligen Koordinaten:*

$$(1) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = q^2$$

und also, wenn der Mittelpunkt insbesondere der Nullpunkt O ist:

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = q^2,$$

so daß die Kugel zu den „*algebraischen Flächen zweiten Grades*“ gehört.

Entwickelt man in (1) links die Quadrate, so kann man der Kugelgleichung auch die Gestalt geben:

$$(3) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Die Gleichung (3) mit beliebigen Koeffizienten a, b, c und einem nur der Bedingung:

$$(4) \quad d < a^2 + b^2 + c^2$$

unterworfenen Koeffizienten d stellt also immer eine Kugel dar, nämlich diejenige des Radius $+\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - d$ und des Mittelpunktes (a, b, c) .

Ist r der Radiusvektor des Punktes (x, y, z) und sind α, β, γ dessen Richtungswinkel, so kann man die Kugelgleichung (3) auch in die Gestalt kleiden ((1) § 51, S. 94):

$$(5) \quad r^2 - 2r(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) + d = 0.$$

§ 68. Darstellung der Tangentialebene der Kugel.

Der Mittelpunkt der Kugel des Radius ϱ sei der Nullpunkt des rechtwinkligen Koordinatensystems, so daß die Kugelgleichung die Gestalt (2) § 67 hat. Ist (u, v, w) irgendein Punkt der Kugel, so gilt hiernach:

$$(1) \quad u^2 + v^2 + w^2 = \varrho^2.$$

Eine durch (u, v, w) hindurchlaufende Gerade der Richtungskosinus a_0, b_0, c_0 ist nach (6) S. 113 durch die „Parameterdarstellung“:

$$(2) \quad x = u + a_0 t, \quad y = v + b_0 t, \quad z = w + c_0 t$$

angebar. Sie schneidet die Kugel außer in (u, v, w) noch in einem zweiten Punkte, dessen Parameterwert t gleichfalls drei der Kugelgleichung (2) § 67 genügende x, y, z liefert:

$$(u + a_0 t)^2 + (v + b_0 t)^2 + (w + c_0 t)^2 = \varrho^2.$$

Bei Entwicklung der linken Seite unter Benutzung von (1) sowie von $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1$ nimmt diese in t quadratische Gleichung die Gestalt an:

$$2t(a_0 u + b_0 v + c_0 w) + t^2 = 0$$

und liefert in ihrer Lösung $t = 0$ den Punkt (u, v, w) , in ihrer zweiten Lösung:

$$t = -2(a_0 u + b_0 v + c_0 w)$$

aber eben den zweiten Schnittpunkt der Geraden (2) mit der Kugel.

Genügen die Richtungskosinus a_0, b_0, c_0 der Gleichung:

$$(3) \quad a_0 u + b_0 v + c_0 w = 0,$$

so fällt der zweite Schnittpunkt mit dem ersten (u, v, w) zusammen. Eine Gerade (2), deren Richtungskosinus die Gleichung (3) befriedigen, heißt demnach eine zum Berührungspunkte (u, v, w) gehörende „Kugeltangente“.

Ist (x, y, z) irgendein Punkt einer solchen Kugeltangente, so findet man, indem man die Darstellungen (2) dieser x, y, z mit u, v, w multipliziert und addiert, mit Benutzung von (1) und (3):

$$(4) \quad xu + yv + zw = \varrho^2.$$

Jede Kugeltangente des Berührungspunktes (u, v, w) ist demnach in der durch (4) dargestellten Ebene gelegen, welche man als die „Tangentialebene“ der Kugel mit dem Berührungspunkte (u, v, w) bezeichnet.

Die vorstehende Überlegung führt auch bei den im nächsten Kapitel zu betrachtenden Flächen zweiten Grades zur Aufstellung der Tangentialebenengleichungen.¹⁾ Für die Kugel allein hätten wir uns darauf berufen können, daß die Tangentialebene auf dem Kugelradius des Berührungspunktes (u, v, w) senkrecht steht. Die zweite Normalgleichung (2) S. 107 der Tangentialebene hat demnach $p = \varrho$, und die Richtungskosinus des Lotes p sind $\frac{u}{\varrho}, \frac{v}{\varrho}, \frac{w}{\varrho}$, so daß die mit ϱ multiplizierte Normalgleichung sofort die Gleichung (4) ergibt.

§ 69. Pol, Polarebene und reziproke Polaren in bezug auf eine Kugel.

Die durch (2) § 67 gegebene Kugel heiße kurz K . Ein von O verschiedener Punkt P der Koordinaten u, v, w liefert eine durch:

$$(1) \quad xu + yv + zw = \varrho^2$$

dargestellte, dem Punkte P eindeutig zugeordnete Ebene, welche als die „Polarebene“ des Punktes P in bezug auf die Kugel K bezeichnet wird. Umgekehrt heißt der Punkt (u, v, w) der „Pol“ der Ebene (1) in bezug auf K , so daß einer beliebigen, nicht durch O laufenden Ebene $ax + by + cz = d$ der Punkt $\left(\frac{a\varrho^2}{d}, \frac{b\varrho^2}{d}, \frac{c\varrho^2}{d}\right)$ als Pol zukommt.

Hat der Radiusvektor $r = +\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ des Punktes P die Richtungswinkel α, β, γ , so kann man die Gleichung (1) der Polarebene durch Division mit r in die zweite Normalgestalt:

$$x \frac{u}{r} + y \frac{v}{r} + z \frac{w}{r} = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \frac{\varrho^2}{r} = r'$$

setzen. Das Lot r' von O auf die Polarebene des Punktes P berechnet sich somit aus:

$$(2) \quad r r' = \varrho^2$$

und hat dieselben Richtungswinkel wie r .

1) Die Rechnungen werden indessen unten nicht mehr ausgeführt.

Hiernach gilt für die Konstruktion der Polarebene eines gegebenen Punktes P das Folgende. Liegt P auf der Kugelfläche selbst, so ist die Polarebene mit der Tangentialebene identisch. Liegt P innerhalb K , so gelten in einer beliebigen durch O und P hindurchzulegenden Ebene die Angaben der Fig. 21, S. 24, und des zugehörigen Textes; die Gleichung (2) wird eben durch die daselbst aufgestellte Gleichung $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OB}^2$ verwirklicht. Drehen wir die Figur um die Achse OPP' , so beschreibt die Gerade $P'C$ die Polarebene von P , der Kreis liefert die Kugel, und die Tangenten $P'B$ und $P'B'$ ergeben den sogenannten „*Tangentialekegel*“ des Punktes P' . Dieser Kegel hat alle von P' an die Kugel laufenden Tangenten zu Mantellinien und berührt die Kugel längs des bei der eben vollzogenen Drehung von B und B' beschriebenen Kreises. Die Ebene dieses Kreises ist übrigens, wie wieder aus der Gleichung $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OB}^2$ einleuchtend ist, die Polarebene des außerhalb K gelegenen Punktes P' .¹⁾

Es gilt folgender Reziprozitätssatz: *Liegt der Punkt (u_1, v_1, w_1) auf der Polarebene des Punktes (u, v, w) , so liegt auch umgekehrt der Punkt (u, v, w) auf der Polarebene von (u_1, v_1, w_1) .* Wird nämlich die Gleichung (1) durch (u_1, v_1, w_1) befriedigt, d. h. gilt $u_1 u + v_1 v + w_1 w = \varrho^2$, so heißt dies eben auch, daß der Punkt (u, v, w) die Gleichung $xu_1 + yv_1 + zw_1 = \varrho^2$ befriedigt.

Beschreibt demnach ein Punkt P irgendeine Ebene, so dreht sich die Polarebene von P um den Pol dieser Ebene. Beschreibt P die Schnittgerade G zweier Ebenen, so dreht sich die Polarebene von P um die Verbindungsgerade G' der beiden Pole jener Ebenen. Auch umgekehrt ist die Gerade G in der Polarebene jedes Punktes P' von G' enthalten, wie man durch Herausgreifen zweier Ebenen durch G' , welche Polarebenen zweier Punkte von G sind, auf Grund des Reziprozitätssatzes einsieht. Zwei solche Gerade G und G' nennt man „*reziproke Polaren*“ in bezug auf die Kugel K .

Schneidet G die Kugel in den beiden Punkten B_1 und B_2 , so gehören zu ihnen als Polarebenen die zugehörigen Tangentialebenen, deren Schnittgerade somit die zu G reziproke Polare liefert. Läuft G außerhalb K , so kehre man diese Konstruktion um, lege also durch G die beiden Tangentialebenen an K , deren Berührungspunkte die reziproke Polare G' festlegen. Es folgt hieraus noch,

1) Aus den Konstruktionen des Textes folgt: Rückt P in den Mittelpunkt O von K , so wandert die Polarebene ins Unendliche; man sagt, die Polarebene des Mittelpunktes O sei die „unendlich ferne Ebene“ des Raumes. Wandert P' auf der Verlängerung eines Kugelradius ins Unendliche, so wird schließlich die Polarebene von P' die zu jenem Kugelradius senkrechte Diametralebene von K .

daß zwei reziproke Polaren einen Richtungsunterschied von 90^0 miteinander bilden.¹⁾

Alle diese Angaben sind leicht durch Rechnung zu bestätigen. Die Gerade G durch den Punkt (u, v, w) von den Richtungskosinus a, b, c besteht aus den Punkten $(u + at, v + bt, w + ct)$, wo t ein „Parameter“ ist (S. 113). Die zugehörigen Polarebenen, gegeben durch:

$$(xu + yv + zw - \varrho^2) + t(ax + by + cz) = 0,$$

laufen alle durch die Gerade G' der Gleichungen:

$$(3) \quad xu + yv + zw - \varrho^2 = 0, \quad ax + by + cz = 0.$$

Da die zweite dieser Gleichungen die zu G senkrechte Diametralebene darstellt, so bildet G' , als in dieser Ebene gelegen, tatsächlich einen Richtungsunterschied von 90^0 gegen G .²⁾

§ 70. Inversion an einer Kugel.

Wir behalten die Bezeichnungen von § 69 bei. Zwei Punkte P, P' gleicher Richtungswinkel α, β, γ , deren Radienvektoren r, r' die Gleichung (2) § 69 befriedigen, heißen bezüglich der Kugel K einander „invers“, oder man sagt, sie gehen durch „Inversion“³⁾ an der Kugel K ineinander über. Beschreibt P eine Fläche oder Kurve, so beschreibt P' die „bezüglich K inverse Fläche oder Kurve“.

Mittels der Gleichung:

$$(1) \quad er^2 - 2r(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) + d = 0$$

kann man die Ebenen und Kugeln des Raumes zusammenfassend darstellen, die ersteren für $e = 0$. Wie S. 25 finden wir das zu (1) bezüglich K inverse Gebilde dargestellt durch:

$$dr'^2 - 2r' \cdot \varrho^2(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) + e\varrho^4 = 0$$

und erhalten mittels der Überlegung von S. 25 den Satz: Eine nicht durch O laufende Kugel invertiert sich an K wieder in eine Kugel, die nicht durch O läuft; eine Kugel durch O ergibt bei der

1) In dem besonderen (im Texte nicht weiter beachteten) Falle, daß G eine Kugeltangente ist, wird G' einfach die zu G senkrechte Tangente desselben Berührungspunktes.

2) Ist (u, v, w) auf K gelegen und G eine Tangente, so gilt $au + bv + cw = 0$ (S. 117); die zweite Ebene (3) läuft also durch den Berührungspunkt (u, v, w) der durch die erste Gleichung (3) dargestellten Tangentialebene, wodurch sich die Angaben der letzten Note bestätigen.

3) oder durch „Spiegelung“ oder „Transformation vermöge reziproker Radien“.

Inversion eine nicht durch O laufende Ebene, und umgekehrt liefert eine solche Ebene stets eine durch O laufende Kugel; schließlich wird jede Ebene durch O bei der Inversion in sich selbst übergeführt.

Kap. VIII. Die Ellipsoide, die Hyperboloide und die Paraboloid.

§ 71. Das dreiachsige Ellipsoid.

In der x, y -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems sei die der Gleichung:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

entsprechende Ellipse gezeichnet. Dreht man diese Ellipse um ihre auf der x -Achse gelegene Hauptachse, so erzeugt sie im Raume eine Fläche, die als „Umdrehungs“- oder „Rotationsellipsoid“ bezeichnet wird, und deren Gestalt durch die in Fig. 89 angegebene Skizze veranschaulicht wird. Bei einzelnen Punkte der Ellipse (1) beschreiben bei der Umdrehung die „Parallelkreise“ der Rotationsfläche, deren Mittelpunkte auf der x -Achse („Rotationsachse“) liegen,

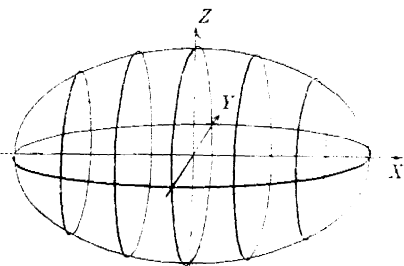


Fig. 89.

und die die zugehörigen in der zweiten Gleichung (1) gegebenen Ellipsenordinaten zu Radien haben; in der Figur sind einige dieser Parallelkreise angedeutet. Die Gleichung des fraglichen Rotationsellipsoids ist:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Legen wir nämlich durch den Punkt $(x_0, 0, 0)$ der x -Achse die zur y, z -Ebene parallele Ebene, die der Gleichung $x = x_0$ entspricht, so erhalten wir durch Eintragen von x_0 für x in (2) als Gleichung der Schnittkurve dieser Ebene mit der durch (2) dargestellten Fläche:

$$y^2 + z^2 = b^2 \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} \right) \quad \text{oder} \quad y^2 + z^2 = y_0^2,$$

unter y_0 die zu x_0 gehörende Ellipsenordinate (1) verstanden. Wir gelangen also hier für $|x_0| \leq a$ in der Tat gerade zu den oben genannten Parallelkreisen, während für $|x_0| > a$, wie es sein muß, reelle Schnittkurven nicht mehr vorliegen.

Von der Gleichung (2) aus kann man (S. 100) die Fläche auch in der Weise konstruieren, daß man im einzelnen, nicht außerhalb der Ellipse (1) gelegenen Punkte (x, y) der x, y -Ebene die aus (2) zu berechnenden z -Koordinaten:

$$z = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

senkrecht nach oben und unten aufträgt.

Man wolle nun alle so aufgetragenen z -Koordinaten, absolut genommen, im Verhältnis $c:b$ verkleinern, unter c eine dem Intervall $0 < c < b$ angehörende Zahl verstanden. Hierbei gehen die Parallelkreise nach S. 37 in Ellipsen der Achsen $2y_0, 2\frac{c}{b}y_0$ über, die Fläche selbst erscheint von oben und unten her gegen die x, y -Ebene zusammengedrückt und liefert das durch:

$$z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

oder in rationaler Gestalt durch:

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dargestellte „dreiaxsiges Ellipsoid“. Diese Fläche ist bezüglich jeder Koordinatenebene sich selbst symmetrisch und hat den Nullpunkt O zum „Mittelpunkte“; die auf den Koordinatenachsen gelegenen „Durchmesser“ $2a, 2b, 2c$ heißen die „Hauptachsen“ oder kurz die „Achsen“ des Ellipsoids, ihre Endpunkte aber die „Scheitelpunkte“ desselben.

In der vorstehenden Betrachtung ist $a > b > c$ angenommen. Neben dem für $a > b = c$ eintretenden „gestreckten Rotationsellipsoid“ haben wir noch für $a = b > c$ das „abgeplattete Rotationsellipsoid“ zu nennen, das durch Drehung einer Ellipse um die kleine Achse erzeugbar ist. Für $a = b = c$ ordnet sich die Kugel ein.

§ 72. Das zweischalige Hyperboloid.

Unter Beibehaltung rechtwinkliger Koordinaten werde jetzt in der x, y -Ebene die der Gleichung:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

entsprechende Hyperbel gezeichnet. Dreht man diese Hyperbel um ihre Hauptachse (x -Achse), so erzeugt sie im Raume ein „Umdrehungs-“ oder „Rotationshyperboloid“ und zwar ein sogenanntes „zweischaliges“ oder ein „Hyperboloid mit zwei Mantelflächen“, dessen Gestalt durch Fig. 90 veranschaulicht wird. Die beiden

„Schalen“ der Fläche entsprechen den beiden Zweigen der erzeugenden Hyperbel und laufen über die beiden, die Figur rechts und links berandenden Parallelkreise ins Unendliche. Wie in § 71 beim Ellipsoid findet man als Gleichung des zweischaligen Rotationshyperboloids:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Man denke die Fläche jetzt wieder durch Auftragen der z -Koordinaten in den Punkten (x, y) der x, y -Ebene hergestellt und verkleinere alsdann alle aufgetragenen z -Koordinaten, absolut genommen, im Verhältnis $c:b$, unter c wieder eine Zahl des Intervalls

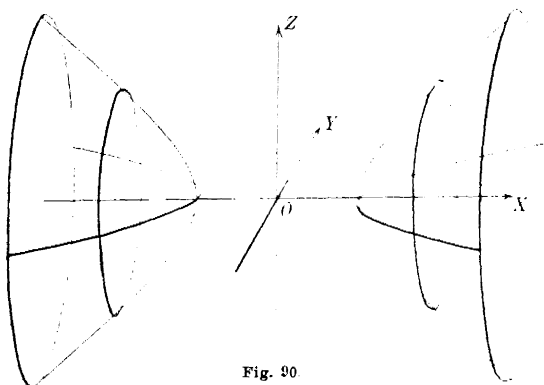


Fig. 90.

$0 < c < b$ verstanden. Die Parallelkreise gehen dabei in Ellipsen über, deren Hauptachsen zur y - und zur z -Achse parallel sind. Die Fläche selbst wird von oben und unten gegen die x, y -Ebene zusammengedrückt und liefert das „dreiaxshige zweischalige Hyperboloid“ oder das „dreiaxshige Hyperboloid mit zwei Mantelflächen“, als dessen Gleichung man wie in § 71 findet:

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Auch diese Fläche ist bezüglich jeder Koordinatenebene sich selbst symmetrisch und hat den Nullpunkt O zum „Mittelpunkt“. Der auf der x -Achse gelegene „Durchmesser“ $2a$ ist die „Hauptachse“, deren Endpunkte die beiden „Scheitelpunkte“ sind. Die in O halbierten Strecken $2b$ und $2c$ der y - und der z -Achse heißen „Nebenachsen“.

§ 73. Das elliptische Paraboloid.

Wie sich die Parabel als Übergangsfall zwischen die Ellipsen und Hyperbeln ordnet (S. 62), so haben wir eine entsprechende

Fläche zweiten Grades, welche als Übergangsfall zwischen den Ellipsoiden und zweischaligen Hyperboloiden anzusehen ist. Man gehe in der x, y -Ebene von der durch:

$$(1) \quad y^2 = 2b^2x$$

gegebenen Parabel des Halbparameters b^2 aus und drehe dieselbe um ihre mit der positiven x -Achse zusammenfallende Achse. Das entstehende „Rotationsparaboloid“ ist in Fig. 91 skizziert und verläuft, entsprechend

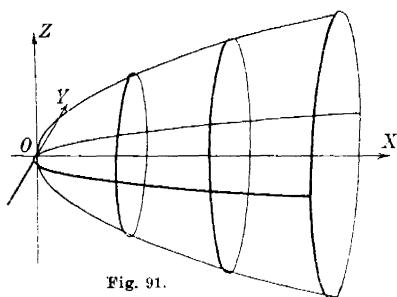


Fig. 91.

der Parabel, über den die Figur rechts berandenden Parallelkreis hinaus ins Unendliche. Die Gleichung dieser Fläche ist:

$$(2) \quad y^2 + z^2 = 2b^2x \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 2x,$$

wie man mit der beim Rotationsellipsoid befolgten Methode zeigt.

Führt man jetzt wieder die Verkürzung der z -Koordinaten im Verhältnis $c:b$ aus, so gehen die bisherigen Parallelkreise in Ellipsen über, und die Fläche erscheint von oben und unten gegen die x, y -Ebene zusammengedrückt, wobei wir also wie bisher an der Bedingung $0 < c < b$ festhalten. Wir gelangen zum „elliptischen Paraboloid“ von der Gleichung:

$$(3) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x,$$

welches die positive x -Achse zur „Achse“, den Punkt O zum „Scheitelpunkt“ und die y, z -Ebene zur „Scheiteltangentialebene“ hat. Die Fläche ist sowohl in bezug auf die x, y -Ebene wie die x, z -Ebene sich selbst symmetrisch, nicht jedoch in bezug auf die y, z -Ebene. Wie die Parabel, so hat auch das elliptische Paraboloid keinen Mittelpunkt.

Vielfach gibt man das elliptische Paraboloid durch die Gleichung:

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Es läuft dies gegenüber der vorstehenden Entwicklung auf eine „zyklische“ Vertauschung der Koordinatenachsen und eine entsprechende Änderung in der Bezeichnung der Nenner in der darstellenden Gleichung hinaus.

§ 74. Das einschalige Hyperboloid.

Es sei jetzt in der x, z -Ebene durch die Gleichung:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x = \pm a \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}}$$

eine Hyperbel gegeben, deren Nebenachse die z -Achse ist¹⁾. Bei Drehung um diese Achse erzeugt die Kurve als „Umdrehungs-“ oder „Rotationshyperboloid“ ein sogenanntes „einschaliges Hyperboloid“ oder ein „Hyperboloid mit einer Mantelfläche“. Die Gestalt dieser Fläche ist in Fig. 92 skizziert; natürlich läuft die Fläche über die beiden, die Figur oben und unten berandenden Parallelkreise wieder ins Unendliche.

Als Gleichung des einschaligen Rotationshyperboloids finden wir aus (1) auf dem bisherigen Wege:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Man denke jetzt diese Fläche dadurch hergestellt, daß man im einzelnen Punkte (x, z) der x, z -Ebene die beiden zugehörigen, einander entgegengesetzten y -Koordinaten aufträgt. Sodann wolle man, unter b eine dem Intervall $0 < b < a$ angehörende Zahl verstanden, alle aufgetragenen y -Koordinaten, absolut genommen, im Verhältnis $b : a$ verkleinern. Die Fläche erscheint von vorn und hinten gegen die x, z -Ebene zusammengedrückt und liefert das „dreiaxige einschalige Hyperboloid“ oder das „dreiaxige Hyperboloid mit einer Mantelfläche“, als dessen Gleichung man wie bisher:

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

findet. Die Fläche ist wieder bezüglich jeder Koordinatenebene sich selbst symmetrisch, und sie hat den Nullpunkt O zum „Mittelpunkt“. Die auf der x -Achse und der y -Achse gelegenen „Durchmesser“ $2a$ und $2b$ sind die „Hauptachsen“ der Fläche, deren Endpunkte ihre „Scheitelpunkte“. Die in O halbierte Strecke $2c$ der z -Achse heißt „Nebenachse“ des Hyperboloids.

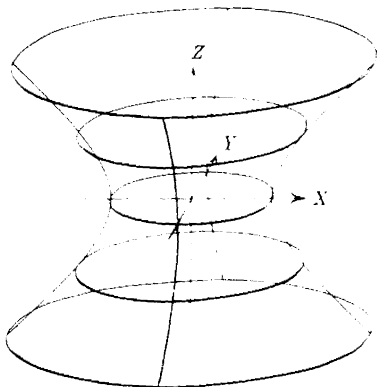


Fig. 92.

1) Hier soll unentschieden bleiben, ob $c < a$ oder $= a$ oder $> a$ ist

§ 75. Das hyperbolische Paraboloid.

Eine letzte noch zu betrachtende Fläche zweiten Grades kann nicht durch Vermittlung einer Rotationsfläche versinnlicht werden, ist jedoch als Grenzfall des einschaligen Hyperboloids zugänglich. Man vollziehe die Parallelverschiebung des in § 74 benutzten rechtwinkligen Koordinatensystems nach dem Punkte $(-a, 0, 0)$ als neuem Nullpunkte. Die Gleichung (3) § 74 des Hyperboloids nimmt, wenn die neuen Koordinaten gleich wieder x, y, z genannt werden, die Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{2x}{a}$$

an oder nach Multiplikation mit a und Benutzung der abkürzenden Bezeichnungen $\frac{b}{\sqrt{a}} = b', \frac{c}{\sqrt{a}} = c'$:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 2x.$$

Läßt man nun bei festbleibenden b', c' die Zahl a unendlich werden, so gehen die von der x, y -Ebene auf dem Hyperboloid ausgeschnittene Ellipse und die von der x, z -Ebene ausgeschnittene Hyperbel zugleich in Parabeln über. Bei der entstehenden Fläche, dem „hyperbolischen Paraboloid“, wollen wir indessen gerade wie bei dem elliptischen Paraboloid S. 124 eine „zyklische“ Vertauschung der Koordinatenachsen unter entsprechender Änderung der Bezeichnungen der Koeffizienten vornehmen und schreiben:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

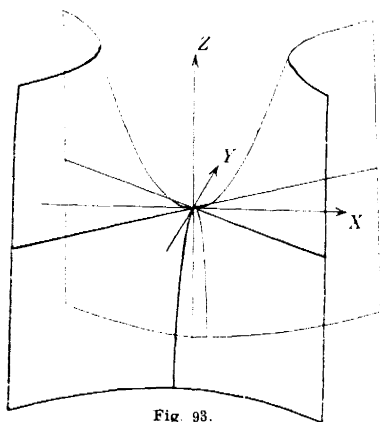


Fig. 93.

als Gleichung des hyperbolischen Paraboloids.

In Fig. 93 ist die dieser Gleichung entsprechende Fläche in der Nähe des Nullpunktes skizziert, und zwar dadurch, daß die Schnitte der Fläche mit den Koordinatenebenen sowie mit der Oberfläche eines um O als Mittelpunkt gelegten regulären Hexaeders angegeben sind, dessen Flächen zu den Koordinatenebenen parallel

laufen, und dessen Kantenlänge etwa gleich 1 ist¹⁾. Die durch $z = 0$ gegebene x, y -Ebene schneidet das Paraboloid in dem durch:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$$

dargestellten Geradenpaar. Die beiden zur x, y -Ebene parallelen Ebenen der Gleichungen $z = \pm \frac{1}{2}$ liefern als Schnitte die konjugierten Hyperbeln:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Die x, z -Ebene schneidet die Fläche in der Parabel $x^2 = 2a^2z$, die y, z -Ebene in der Parabel $y^2 = -2b^2z$ usw. Die Fläche ist sich selbst symmetrisch bezüglich der x, z -Ebene und auch bezüglich der y, z -Ebene, nicht jedoch in bezug auf die x, y -Ebene. Der Nullpunkt O heißt der „Scheitelpunkt“ des Paraboloids; in der Umgebung dieses Punktes hat die Fläche die Gestalt eines Sattels. Die x, y -Ebene ist als „Scheiteltangentialebene“ zu bezeichnen.

§ 76. Kreisschnitte und Kreisscheibenmodelle der Flächen zweiten Grades.

Bei Gebrauch rechtwinkliger Koordinaten in der Ebene sind die Kreise durch Gleichungen der Gestalt:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

dargestellt, falls $A^2 + B^2 > 4C$ ist (S. 22). Gilt $A^2 + B^2 < 4C$, so ist die Gleichung (1) durch kein reelles Wertepaar x, y zu befriedigen, wir sagen dann, sie stelle einen „imaginären Kreis“ dar. Ist $A^2 + B^2 = 4C$, so zieht sich der Kreis auf einen Punkt zusammen; diesen Fall wollen wir den reellen Kreisen zurechnen.

Wird eine vorgelegte Fläche zweiten Grades durch eine Ebene in einem (reellen oder imaginären) Kreise geschnitten, so möge diese Ebene als eine „Kreisschnittebene“ der Fläche bezeichnet werden. Machen wir sie zur x, y -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so muß die Gleichung der Fläche die Gestalt:

$$(2) \quad (x^2 + y^2 + Ax + By + C) + z(ax + by + cz + d) = 0$$

annehmen; denn die Gleichung muß in jedem Koordinatensysteme vom zweiten Grade sein, in dem ausgewählten aber insbesondere so gebaut sein, daß sie für $z = 0$ in eine Gleichung (1) übergeht.

Eine beliebige Parallelebene zur Kreisschnittebene (x, y -Ebene)

1) In der Figur ist $a > b$ angenommen, doch soll diese Voraussetzung keineswegs allgemein gelten. Die beiden zur x, z -Ebene parallelen Flächen des Hexaeders werden vom Paraboloid der Fig 93 nicht geschnitten.

ist durch $z = e$ darstellbar. Durch Eintragen von $z = e$ in (2) findet man die Schnittkurve dieser Ebene mit der Fläche durch:

$$x^2 + y^2 + (A + ae)x + (B + be)y + (C + ce^2 + de) = 0$$

dargestellt. Da dies wieder eine Gleichung der Gestalt (1) ist, so folgt: *Liegt irgendeine Kreisschnittebene einer Fläche zweiten Grades vor, so besteht die ganze Schar ihrer Parallelebenen aus lauter Kreisschnittebenen; insbesondere schneiden diejenigen unter diesen Ebenen, welche die Fläche treffen, reelle Kreise aus.*

Bei der Aufsuchung der Kreisschnitte der in §§ 71 bis 74 betrachteten Flächen zweiten Grades genügt es demnach, die etwa durch den Punkt O laufenden Kreisschnittebenen festzustellen. *Beim hyperbolischen Paraboloid lehrt die Anschauung der Fig. 93, S. 126, daß Kreisschnittebenen nicht existieren können: dagegen werden wir beim Ellipsoid, den beiden Hyperboloiden und dem elliptischen Paraboloid leicht Kreisschnittebenen nachweisen.*

Den Übergang zu einer neuen x', y' -Ebene, die wir auf ihre Eigenschaft als Kreisschnittebene prüfen wollen, vollziehen wir nach S. 97 und Fig. 84 durch die beiden ersten daselbst beschriebenen Drehungen, denen die Drehungswinkel ψ und ϑ zukamen, so daß in den Transformationsformeln (1) und (2) S. 98 der dritte Winkel $\varphi = 0$ zu setzen ist¹⁾. Die hernach auszuführende Eintragung $z' = 0$ kann auch sogleich vorgenommen werden. Es muß demnach die Eintragung:

$$x = x' \cos \psi - y' \sin \psi \cos \vartheta, \quad y = x' \sin \psi + y' \cos \psi \cos \vartheta, \\ z = y' \sin \vartheta$$

für x, y, z in die Flächengleichung in x', y' eine Gleichung der Gestalt (1) liefern.

Diese Forderung ist leicht bei den einzelnen Flächen zu prüfen. Wählen wir als Beispiel das zweischalige Hyperboloid (3) S. 123, indem wir an der damaligen Voraussetzung:

$$(3) \quad b > c$$

festhalten, so müssen in der transformierten Gleichung, damit sie die Gestalt (1) hat, die Koeffizienten von x'^2 und y'^2 gleich sein, und der Koeffizient von $x' \cdot y'$ muß verschwinden:

$$(4) \quad \frac{\cos^2 \psi}{a^2} - \frac{\sin^2 \psi}{b^2} = \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \vartheta}{a^2} - \frac{\cos^2 \psi \cos^2 \vartheta}{b^2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2},$$

$$(5) \quad - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cos \psi \sin \psi \cos \vartheta = 0.$$

1) Man erinnere sich, daß durch diese beiden Drehungen bereits die neue x', y' -Ebene erreicht wurde; die Lage der beiden Achsen in dieser Ebene ist für die folgende Betrachtung gleichgültig.

Da nach S. 97 für ψ und ϑ die Ungleichungen $0^\circ \leq \psi < 180^\circ$, $0^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$ gelten, so ist zufolge (5) entweder $\psi = 90^\circ$ oder $\psi = 0^\circ$ oder $\vartheta = 90^\circ$. Im zweiten Falle, $\psi = 0^\circ$, liefert (4):

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{\cos^2 \vartheta}{b^2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2},$$

eine Gleichung, die durch keinen Winkel ϑ befriedigt werden kann. Im dritten Falle, $\vartheta = 90^\circ$, folgt aus (4) und (3):

$$\cos^2 \psi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} < 0,$$

eine Bedingung, der kein ψ genügt. Dagegen finden wir für $\psi = 90^\circ$, wo Gleichung (4) die Gestalt:

$$-\frac{1}{b^2} = \frac{\cos^2 \vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2 \vartheta}{c^2}$$

annimmt, mit Rücksicht auf $0^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$ die beiden Lösungen:

$$\sin \vartheta = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{b\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos \vartheta = \pm \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Die Kreisschnittebene $z' = 0$ hat nach S. 99 im ursprünglichen Systeme die Gleichung $a_3x + b_3y + c_3z = 0$, also folgt aus (2) S. 98 für die berechneten Winkel $\psi = 90^\circ$, $\varphi = 0^\circ$ und ϑ : *Beim zweischaligen Hyperboloid haben wir durch den Punkt O zwei und nur zwei Kreisschnittebenen:*

$$(6) \quad cx\sqrt{a^2 + b^2} \pm az\sqrt{b^2 - c^2} = 0,$$

welche die y -Achse enthalten, bezüglich der x, y -Ebene oder (was auf dasselbe hinausläuft) bezüglich der y, z -Ebene einander symmetrisch sind und im Falle des Rotationshyperboloids ($b = c$) mit der y, z -Ebene zusammenfallen.

Beim Ellipsoid (3) S. 122 mit $a > b > c$, dem elliptischen Paraboloid (4) S. 124 mit $a > b$ und dem einschaligen Hyperboloid (3) S. 125 mit $a > b$ findet man auf gleiche Art: *Jede dieser Flächen hat zwei durch O hindurchlaufende Kreisschnittebenen, für welche man entsprechende Aussagen wie beim zweischaligen Hyperboloid aus ihren Gleichungen:*

$$cx\sqrt{a^2 - b^2} \pm az\sqrt{b^2 - c^2} = 0 \quad (\text{Ellipsoid}).$$

$$bz \pm y\sqrt{a^2 - b^2} = 0 \quad (\text{elliptisches Paraboloid}),$$

$$cy\sqrt{a^2 - b^2} \pm bz\sqrt{a^2 + c^2} = 0 \quad (\text{einschaliges Hyperboloid})$$

ableiten wird¹⁾.

1) Beim Ellipsoid (auch beim einschaligen Hyperboloid) ist das Ergebnis auch direkt geometrisch einleuchtend. Eine die y -Achse nicht

Indem man sich Kreisscheiben aus Karton ausschneidet und in geeigneten Fassungen parallel zusammenordnet, kann man sich auf Grund der gewonnenen Sätze leicht „Kreisscheibenmodelle“ der Flächen zweiten Grades herstellen. Ein solches Kreisscheibenmodell des Ellipsoids ist in Fig. 94 abgebildet und zwar ist der Konstruktion der Figur ein Ellipsoid zugrunde gelegt, dessen Halb-

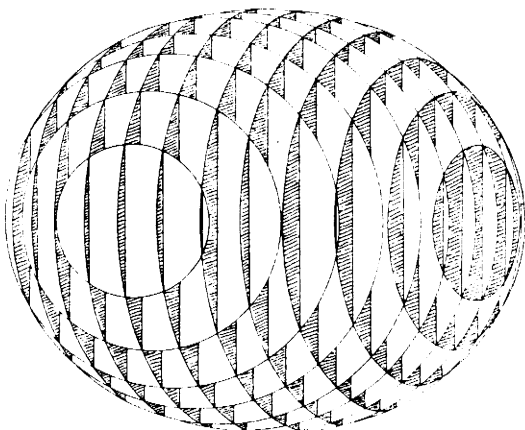


Fig. 94.

achsen die Proportion $a : b : c = 4 : 3 : 2$ befriedigen. Das Modell ist von einem weit entfernten Punkte des Lotes aufgenommen, welches auf der einen diametralen Kreisschnittebene in O errichtet ist, so daß sich die Kreisschnitte des einen Systems auch in der Figur als Kreise darstellen. Zieht man wie in Fig. 94 bei Herstellung eines Modells sogleich beide Systeme paralleler Kreisscheiben heran, so sind die Scheiben mit Schlitzten zu versehen, um sie ineinanderschieben zu können¹⁾.

enthaltende Ebene durch O schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse des Mittelpunktes O , welche in der x, y -Ebene einen Radius $> b$ und in der y, z -Ebene einen Radius $< b$ hat und deshalb nie ein Kreis sein kann. Eine Ebene durch die y -Achse gibt eine Schnittellipse, deren eine Hauptachse $2b$ auf der y -Achse liegt, während die andere Hauptachse der x, z -Ebene angehört. Die Forderung, daß auch diese gleich $2b$ sei und also ein Kreis vorliege, führt leicht zu den oben angegebenen Kreisschnittebenen.

1) Von den S. 101 ff. besprochenen Flächen zweiten Grades haben der elliptische Zylinder und der Kegel Kreisschnittebenen, nicht jedoch der parabolische und der hyperbolische Zylinder, wie aus den Gestalten der Flächen leicht hervorgeht.

§ 77. Gerade Linien auf Flächen zweiten Grades und Fadenmodelle der Flächen.

Durch einen beliebigen Punkt P des einschaligen Hyperboloids (3) S. 125 lege man die zur x, y -Ebene parallele Ebene, sowie die durch die z -Achse laufende Ebene. Die erste Ebene schneidet auf dem Hyperboloid eine Ellipse, die zweite eine Hyperbel aus (s. etwa Fig. 92, S. 125). Die Tangenten dieser beiden Kurven in P legen eine Ebene E fest¹⁾, welche durch diese Tangenten in vier bei P zusammenstoßende Teilebenen zerlegt wird. Die Ellipse und die nächst benachbarten Teile des Hyperboloids liegen auf der einen Seite von E , die Hyperbel und die nächst benachbarten Flächen-teile auf der anderen Seite dieser Ebene E . Das Hyperboloid muß demnach in jeder jener vier Teilebenen die Ebene E in der Art durchdringen, daß wir als Bestandteile der Durchdringungskurve jedenfalls vier von P in den vier Teilebenen ausziehende Kurven-züge erhalten. Nun ist aber die Durchdringungskurve vom zweiten Grade²⁾, und alle Kurven dieses Grades sind oben (S. 65 ff.) aufgestellt. Indem man die verschiedenen Arten der Kurven zweiten Grades durchgeht, erkennt man, daß eine Kurve dieses Grades, die vier von P ausziehende Züge besitzt, ein Paar sich in P überkreuzender Geraden darstellt. Es ergibt sich der Satz: *Durch jeden Punkt P des einschaligen Hyperboloids laufen zwei gerade Linien hindurch, welche in ihrer ganzen Ausdehnung der Fläche angehören.*

Ist zweitens P ein Punkt (u, v, w) des hyperbolischen Paraboloids (2) S. 126, so ziehe man die beiden Ebenen $x = u$ und $y = v$ heran, die zur y, z -Ebene bzw. zur x, z -Ebene des Koordinatensystems parallel laufen. Sie schneiden auf dem Paraboloid die beiden Parabeln:

$$y^2 = -2b^2\left(z - \frac{u^2}{2a^2}\right), \quad x^2 = +2a^2\left(z + \frac{v^2}{2b^2}\right)$$

aus, von denen die erste nach unten, die zweite nach oben konkav ist (s. auch Fig. 93, S. 126). Durch Wiederholung der eben beim Hyperboloid durchgeführten Überlegung folgt: *Auch durch jeden Punkt des hyperbolischen Paraboloids laufen zwei gerade Linien hindurch, die in ihrer ganzen Ausdehnung der Fläche angehören*³⁾.

1) E ist die Tangentialebene des Hyperboloids im Punkte P .

2) Jede Ebene schneidet eine Fläche zweiten Grades in einer (reellen oder imaginären) Kurve zweiten Grades, wie man leicht nachweist, indem man die Ebene zur x', y' -Ebene eines neuen Koordinatensystems macht und hernach zur Gewinnung der Schnittkurve $z' = 0$ setzt.

3) Daß durch jeden Punkt eines Zylinders oder Kegels zweiten Grades eine der Fläche angehörige Gerade, nämlich eine Mantellinie, hindurchläuft, ist selbstverständlich. Auch ist geometrisch einleucht-

Um die gefundenen Geraden durch Gleichungenpaare darzustellen, setzen wir erstlich die Gleichung (3) S. 125 des einschaligen Hyperboloids in die Gestalt:

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Indem wir unter s irgendeine zunächst endliche und nicht verschwindende Zahl verstehen, geben wir durch die beiden linearen Gleichungen:

$$(2) \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = s \left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad s \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}$$

eine Gerade G_s , welche in der Tat in ihrer ganzen Ausdehnung der Fläche angehört. Ist nämlich (x, y, z) irgendein Punkt von G_s , so sind durch diesen Punkt beide Gleichungen (2) befriedigt, also auch ihr durch s geteiltes Produkt, d. h. die Gleichung (1). Auch für $s = 0$ stellt das Paar (2) eine Gerade des Hyperboloids dar. Indem wir aber $s' = s^{-1}$ setzen und die Gleichungen (2) in:

$$(3) \quad s' \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = s' \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

umschreiben, folgt auch für $s' = 0$, ein Wert, der sowohl für $s = +\infty$, als $s = -\infty$ erreicht wird, eine bestimmte auf dem Hyperboloid gelegene Gerade. Verstehen wir unter s einen alle (reellen) Werte durchlaufenden „Parameter“, so haben wir in (2) eine „Schar“ von Geraden G_s auf dem Hyperboloid dargestellt, die sich stetiger Änderung von s entsprechend stetig aneinanderreihen; und zwar kommt dieser Schar insofern ein ringförmiger Zusammenschluß zu, als den beiden Extremwerten $s = \pm \infty$ ein und dieselbe Gerade entspricht.

Es besteht weiter der Satz: Durch jeden Punkt (x, y, z) des Hyperboloids läuft eine und nur eine Gerade G_s der Schar (2) hindurch. Verschwindet nämlich für (x, y, z) keiner der vier Linearfaktoren in (1), so gilt:

$$\frac{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}$$

und der endliche, von 0 verschiedene Wert dieser Quotienten liefert den eindeutig bestimmten Parameter s der durch (x, y, z) hindurchlaufenden G_s . Ist $y = b$, so bestimmt sich s aus der ersten

tend, daß auf dem Ellipsoid, dem elliptischen Paraboloid und dem zweischaligen Hyperboloid gerade Linien nicht existieren.

Gleichung (2) eindeutig. Die zugehörige Gerade G_s läuft aber tatsächlich durch (x, y, z) , da auch die zweite Gleichung (2) erfüllt ist. Es ist nämlich für $y = b$ zufolge (1) entweder $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$, und dann gilt $s = 0$, oder es ist $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} \neq 0$ (wo auch $s \neq 0$ gilt), und dann ist zufolge (1) eben $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$. Für $y = -b$ zieht man zu entsprechendem Gebrauche die Gleichungen (3) heran.

An (2) reihen wir jetzt das Gleichungenpaar:

$$(4) \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = t \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad t \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}$$

an, welches zu einer entsprechenden Betrachtung Anlaß gibt. Es gilt der Satz: *Durch das Gleichungenpaar (4) mit dem „Parameter“ t ist eine zweite „Schar“ von Geraden G_t auf dem Hyperboloid dargestellt, wobei wieder durch jeden Punkt der Fläche eine und nur eine Gerade der Schar hindurchläuft.* Weiter besteht der Satz: *Zwei Gerade der gleichen Schar schneiden sich nicht, zwei Gerade verschiedener Scharen schneiden sich stets.* Der erste Teil des Satzes ist bereits bewiesen; denn hätten G_s und G_t einen Punkt gemein, so würden durch diesen Punkt des Hyperboloids eben zwei Gerade der ersten Schar laufen, was ausgeschlossen ist. Den zweiten Teil des Satzes beweisen wir durch Angabe der Koordinaten:

$$(5) \quad x = a \frac{st+1}{s+t}, \quad y = -b \frac{s-t}{s+t}, \quad z = c \frac{st-1}{s+t}$$

des Schnittpunktes von G_s und G_t ¹⁾. Die gesamten Geraden der einen Schar erscheinen somit längs einer einzelnen Geraden der anderen Schar aufgereiht.

Daß die hiermit betrachteten Geraden G_s und G_t durch einen einzelnen Punkt P des Hyperboloids die am Anfang des Paragraphen gefundenen beiden Geraden durch P sind, ist jetzt leicht zu zeigen. Es kann nämlich durch P überhaupt keine dritte Gerade G , die ganz auf der Fläche liegt, hindurchlaufen. Gäbe es eine solche, so lege man durch einen von P verschiedenen Punkt P' von G die zugehörige $G_{s'}$ der ersten Schar, welche nicht mit G identisch sein kann und übrigens G_t schneidet. Die Ebene des aus G_t , G und $G_{s'}$ gebildeten Dreiecks würde dann das Hyperboloid in diesen drei Geraden schneiden, während doch die Schnittkurve zweiten Grades nur in zwei Gerade zerfallen kann.

Die vorstehenden Entwicklungen überträgt man ohne Mühe auf das hyperbolische Paraboloid; wir begnügen uns damit, die Gleichungen

1) Als Spezialfall gilt: Ist $s+t=0$, so sind G_s und G_t parallel.

chungenpaare der beiden Geradenscharen für das hyperbolische Paraboloid (2) S. 126 anzugeben:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2s, \quad s\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = tz, \quad t\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2.$$

Auf Grund der gewonnenen Sätze können wir Modelle des einschaligen Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids mittels gespannter Fäden, sogenannte „Fadenmodelle“ der beiden Flächen leicht herstellen. Fig. 95 zeigt ein Fadenmodell eines einschaligen Hyperboloids, von einem weit entfernten Punkte der y -Achse ge-

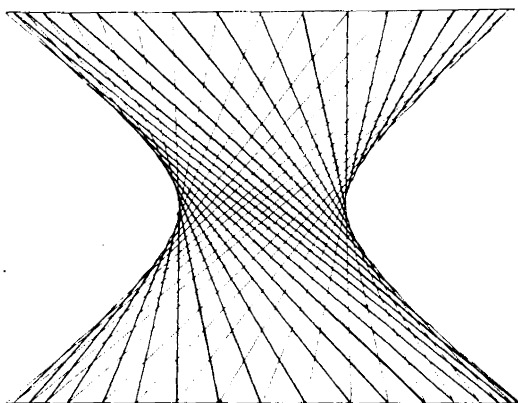


Fig. 95.

sehen. Durch zwei Parallelebenen zur x, y -Ebene, die oberhalb und unterhalb dieser Koordinatenebene verlaufen und gleichen Abstand von ihr haben, wird das Hyperboloid in zwei kongruenten Ellipsen E und E' geschnitten¹⁾. In diese beiden Ellipsen sind die Fäden, den Geraden G_s und G_t entsprechend, eingespannt²⁾. Bei der Herstellung des Modells gehe man so vor. Eine erste Gerade G_t werde vom Punkte Q auf E nach dem Punkte Q' der Ellipse E' gespannt. Die Strecke QQ' der Geraden G_t wird dann von einer Anzahl von Geraden G_s getroffen. Beginnt eine einzelne

1) In der Figur projizieren sich E und E' in die beiden geradlinigen Ränder.

2) In Fig. 95 sind die Geraden der einen Schar etwas stärker als die der anderen ausgezogen. Doch kann man die Zeichnung auch so auffassen, daß nur eine Geradenschar zur Darstellung gelangt ist; die schwächer ausgezogenen Geraden liegen dann auf der Rückseite des Modells.

dieser Geraden im Punkte P der Ellipse E , so schneidet die durch P und G_t festgelegte Ebene die Ellipse E' außer in Q' noch in einem zweiten Punkte P' ; G_s ist dann die Gerade PP' . Man wird so leicht eine Anzahl von Geraden G_s von E nach E' spannen, welche QQ' treffen. Diese dienen dann entsprechend zur Anlage weiterer Fäden G_t usw.

In Fig. 96 ist ein Modell des hyperbolischen Paraboloids abgebildet, bei dem die Fäden in ein windschiefes Viereck, gebildet aus zwei Geraden G_s und zwei Geraden G_t , eingespannt sind. Bei Herstellung des Modells kann

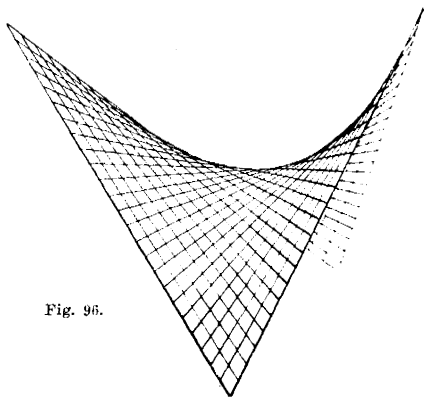


Fig. 96.

man entsprechend verfahren wie eben beim Hyperboloid. Man spanne zwischen den beiden Randgeraden G_s eine erste Gerade G_t . Damit sind dann bereits alle Geraden G_s des Modells bestimmt. Ein Punkt P der einen Randgeraden G_t liefert nämlich mit der eingespannten G_t eine Ebene, die die gegenüberliegende Randgerade G_t im Punkte P' schneide, dann ist PP' eine Gerade G_s .

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

HANDBUCH DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

DR. H. E. TIMERDING

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN BRAUNSCHWEIG

- I. Band: **Praktische Analysis.** Von Dr. Horst von Sanden, Privatdozent an der Universität Göttingen. Mit 30 Figuren. [XIX u. 185 S.] 8. 1914. Geh. \mathcal{M} 3.60, in Leinwand geb. \mathcal{M} 4.20.
- II. Band: **Darstellende Geometrie.** Von Dr. Johannes Hjelmslev, o. Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Kopenhagen. Mit 305 Figuren. [IX u. 320 S.] 8. 1914. Geh. \mathcal{M} 5.40, in Leinwand geb. \mathcal{M} 6.—
- III. Band: **Grundzüge der Geodäsie mit Einschluß der Ausgleichungsrechnung.** Von Dr. Martin Näbauer, o. Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Braunschweig. Mit 277 Figuren. [XVI u. 420 S.] 8. 1915. Geh. \mathcal{M} 9.—, in Leinwand geb. \mathcal{M} 9.60.

Weiter werden voraussichtlich folgen:

- IV. Band: **Die graphischen Methoden der technischen Mechanik.**
V. Band: **Mathematische Statistik und Versicherungstechnik.**
VI. Band: **Grundzüge der Astronomie.**

Das Werk, dessen drei erste Teile zunächst erscheinen werden, ist bestimmt, die gesamte angewandte Mathematik in einer für die Studierenden der Universitäten und der Technischen Hochschulen gleich brauchbaren Form zu behandeln. Als angewandte Mathematik bezeichnen wir alle die Zweige der Mathematik, die zwischen der theoretischen Entwicklung und der wirklichen Anwendung auf technische und naturwissenschaftliche Probleme liegen. Hierbei ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß, wo die theoretische Entwicklung für die Anwendung nicht ausreicht, sie in passender Weise ergänzt werden muß. Vor allen Dingen ist angewandte Mathematik eigentliche Mathematik, nicht Physik oder Technik; sie ist nur Mathematik, die nach den Anwendungsgebieten und den praktischen Zwecken orientiert ist. Danach bestimmt sich der mathematische Charakter des vorliegenden Werkes und die Abgrenzung seiner einzelnen Teile. Dienlich wird es sich jedem erweisen, für den der praktische Gebrauch der Mathematik in irgendeiner Hinsicht, und aus welchem Grunde es auch sei, Interesse hat.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

DIE ELEMENTE DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE

ZUM GEBRAUCHE AN HÖHEREN LEHRANSTALTEN
SOWIE ZUM SELBSTSTUDIUM

Mit zahlreichen Übungsbeispielen

In zwei Teilen:

I. Die analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. H. Ganter, Professor an der Kantonsschule zu Aarau, und Dr. F. Rudio, Professor am Polytechnikum zu Zürich. Mit 53 Figuren im Text. 8., verbesserte Auflage. [VIII u. 191 S.] gr. 8. 1913. In Leinwand geb. n. M 3.—

II. Die analytische Geometrie des Raumes. Von Dr. Ferd. Rudio, Professor am Polytechnikum zu Zürich. Mit 20 Fig. im Text. 5., verb. Auflage. [X u. 194 S.] gr. 8. 1913. In Leinwand geb. n. M 3.—

„Das rasche Aufeinanderfolgen neuer Auflagen ist an und für sich schon ein Beleg für die Güte und Brauchbarkeit dieses Lehrbuches. Wenn sich aber trotz des durchschlagenden Erfolges die Autoren in ihrer bekannten Rührigkeit noch bemühen, die in verschiedenen, ausnahmslos günstigen Besprechungen geäußerten Wünsche nach Erweiterung nach Maßgabe des Grundplanes tunlichst zu berücksichtigen, so sichern sie damit ihrem Werke dauernde Beliebtheit und verschaffen ihm schließlich jene klassische Bedeutung, welche nur durch das harmonische Zusammenwirken von Arbeit und Kritik erreichbar ist. . . . Und so wird sich denn das nach streng wissenschaftlichen Prinzipien verfaßte und dabei leicht verständliche Werk beim Schul- und Selbstunterricht neuerdings fruchtbringend bewähren und zuversichtlich noch späteren Generationen in immer zeitgemäßem Gewande ein Born gründlicher Belehrung bleiben.“ (Zeitschrift für das Realschulwesen.)

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE

ELEMENTARES LEHRBUCH FÜR HÖHERE LEHRANSTALTEN

VON OBERLEHRER Dr. EUGEN LUTZ

Mit 132 Fig. [X u. 301 S.] gr. 8. 1909. Geh. M 5.—, in Leinw. geb. M 6.—

Das Buch soll eine Brücke sein zwischen Schul- und Hochschulmathematik und soll dem Lehrer als Handbuch, dem Primaner vor allem zum häuslichen Studium dienen. Sorgfältige Stoffgliederung, übersichtliche und leicht verständliche Darstellung und fortwährende Einübung an einem umfangreichen Material gut gerichteter Übungsaufgaben: das sind die drei wesentlichen Merkmale dieses Lehrbuches. Den Figuren wurde besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Bei der Ableitung der Lehrsätze ist fast durchweg der Grundsatz befolgt worden, das zu lösende Problem dem Schüler vorzulegen und erst hernach das gefundene Ergebnis in einem Satz zu formulieren. Das starre euklidische Verfahren, wonach der Satz zuerst fertig ausgesprochen und dann bewiesen wird, liegt gewiß nicht im Interesse eines gesunden Unterrichts, der die Selbsttätigkeit anregen möchte.

VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

Repertorium der höheren Mathematik. Von E. Pascal. 2., völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe. Unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker herausgegeben von P. Epstein, R. Rothe und H. E. Timerding. In 2 Bänden: Analysis und Geometrie. 8.

I. Band: Analysis. Unter Mitwirkung von R. Fricke, Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Hecke, E. Jahnke, H. Jung, G. Kowalewski, A. Loewy, E. Pascal, H. E. Timerding, hrsg. von P. Epstein und R. Rothe.

I. Hälfte: Algebra, Differential- und Integralrechnung. XV, 527 S. 1910. geb. n. M. 10.—

II. „ [Erscheint Sommer 1915.]

II. „ Geometrie. Unter Mitwirkung von L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, Fr. Dingeldey, F. Enriques, G. Girard, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Møllerup, J. Neuberg, U. Perrazzo, O. Staudé, E. Steinitz, H. Wieleitner, K. Zindler, hrsg. von H. E. Timerding.

I. Hälfte: Grundlagen und ebene Geometrie. XVI, 534 S. 1910. geb. n. M. 10.—

II. „ [Erscheint Sommer 1915.]

„... Ich muß es mir versagen, bei einem enzyklopädischen Werke auf Einzelheiten einzugehen, ich will nur noch bemerken, daß gerade die hier vorgetragenen Teile des Pascalschen Repertoriums mit der üblichen Schulmathematik in innigster Berührung stehen und deshalb für die Lehrer an höheren Schulen von allergrößtem Interesse sind.“ (Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter.)

Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. Von H. Weber und J. Wellstein. In 3 Bänden. Mit Textfig. gr. 8. geb.

Band I: Elementare Algebra und Analysis. Von H. Weber. 3. Auflage. XVIII, 531 S. 1909. n. M. 10.—

„ II: Elemente der Geometrie. Von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. XII, 596 S. 1907. n. M. 12.—

„ III: Angewandte Elementar-Mathematik. Von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber. 2. Auflage. In 2 Teilen.

I. Teil: Mathematische Physik. Mit einem Buche über Maxima und Minima von H. Weber und J. Wellstein. Bearbeitet von R. H. Weber. 2. Auflage. XII, 586 S. 1910. n. M. 12.—

II. „ Darstellende Geometrie, graphische Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie. Von J. Wellstein, H. Weber, H. Bleicher und J. Bauschinger. 2. Auflage. XIV, 671 S. 1912. n. M. 14.—

„Das Buch ist ein mathematisches Handbuch ersten Ranges und sowohl zur Neuerwerbung mathematischen Wissens als auch zur Wiederholung vortrefflich geeignet. Es kann daher jedem Freunde der Mathematik, jedem Seminarabituienten, der auf diesem Gebiete weiterarbeiten will, jedem Studierenden der Mathematik — und noch manchem darüber hinaus auf das wärmste empfohlen werden.“

(Literarische Beilage zur Pädagogischen Zeitung)

Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer. In 2 Tln. gr. 8. geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber. 2 Bände.

I. Band: Arithmetik. Von Professor C. Färber in Berlin. Mit 9 Figuren. XV, 410 S. 1911. M. 9.—

II. „ Algebra. Von Professor E. Netto in Gießen. Mit 8 Figuren. XII, 232 S. 1915. M. 7.20.

II. „ Die Grundlehren der Geometrie. Von W. Frz. Meyer und H. Thieme. 2 Bände.

I. Band: Die Elemente der Geometrie. Von Professor Dr. H. Thieme in Bromberg. Mit 323 Figuren. XII, 394 S. 1909. M. 9.—

II. „ Die geometrischen Gebilde vom Standpunkte der Verwandtschaften. Von Professor Dr. Frz. Meyer in Königsberg [In Vorbereitung.]

Die „Grundlehren der Mathematik“ sind kein Handbuch, in dem aller irgendwie wissenschaftliche Stoff aufgespeichert wurde, sondern sie sind in erster Linie dem Unterricht, und zwar auch dem Selbstunterricht gewidmet. Tieferen Fragen suchen sie durch gelegentliche Ausblicke gerecht zu werden. Nicht minder soll auch den historischen Interessen Rechnung getragen werden durch die Angabe der wichtigsten Momente in der zeitlichen Entwicklung der einzelnen Theorien.

VERLAG VON B.G. TEUBNER IN LEIPZIG UND BERLIN

Detle, W., analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit 45 Fig. VI, 232 S. gr. 8. 1909. geb. n. *M.* 4.40.

„... Der verhältnismäßig große Umfang des behandelten Stoffes, die klare, außerordentlich anschauliche Darstellungsform und die zahlreichen, sehr geschickt gewählten Rechnungsbeispiele machen das Buch zu einem der empfehlenswertesten Lehrbücher auf diesem Gebiet.“
(Naturwissenschaftliche Rundschau.)

Fort, O., u. O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Teile. Mit Holzschnitten im Text. gr. 8. geh. n. *M.* 9.—, geb. n. *M.* 10.60.

I. Teil: Analytische Geometrie der Ebene, von O. Fort. 7. Aufl. von R. Heger. XVII, 268 S. 1901. geh. n. *M.* 4.—, geb. n. *M.* 4.80.

II. „ Analytische Geometrie des Raumes, von O. Schlömilch. 7. Aufl. von R. Heger. VIII, 326 S. 1913. geh. n. *M.* 6.—, geb. n. *M.* 6.80.

„... Wegen dieses streng systematischen Aufbaues verdient das Werk, obgleich kein Schulbuch im engeren Sinne, doch auch an dieser Stelle eine warme Empfehlung; es wird nicht nur dem jungen Studierenden, für den es zunächst geschrieben ist, vorzügliche Dienste leisten, sondern auch dem bereits in die Sache eingeführten älteren Schüler, der begierig ist, mehr zu erfahren und eine höhere Warte zu erklimmen, und nicht minder dem Lehrer der Realprima bei der Vorbereitung auf den Unterricht — die methodische Vorarbeit freilich erspart es ihm nicht.“
(M. Schuster im Pädagog. Archiv.)

Hochheim, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. 3 Hefte, in je 2 Teilen. gr. 8.

Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 4., vermehrte Auflage, bearbeitet von O. Jahn und Fr. Hochheim. 1911.

A. Aufgaben. VI, 104 S. geb. n. *M.* 2.40.

B. Auflösungen. II, 136 S. geb. n. *M.* 2.60.

„ II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. 3., vermehrte Auflage, bearbeitet von O. Jahn und Fr. Hochheim.

A. Aufgaben. IV, 90 S. 1906. geb. n. *M.* 1.80.

B. Auflösungen. Mit Fig. 106 S. 1908. geh. n. *M.* 1.60, geb. n. *M.* 2.20.

„ III. Die Kegelschnitte. Abt. II. 2. Aufl. 1911.

A. Aufgaben. 69 S. geh. n. *M.* 1.20, geb. n. *M.* 1.80.

B. Auflösungen. 100 S. geh. n. *M.* 1.50, geb. n. *M.* 2.40.

Runge, C., analytische Geometrie der Ebene. Mit 75 Fig. IV, 198 S. gr. 8. 1908. geb. n. *M.* 6.—

„... Das vorliegende Lehrbuch zeichnet sich besonders durch die starke Berücksichtigung der Praxis aus. ... Es ist zu wünschen, daß nicht nur Techniker, sondern auch Studierende der Mathematik das Buch durcharbeiten.“
(Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik.)

Schröder, J., Aufgaben für den Unterricht in der analytischen Geometrie der Ebene an höheren Schulen. Mit 2 Figurentafeln. IV, 49 S. gr. 8. 1910. steif broch. n. *M.* 1.40.

Severi, F., Vorlesungen über algebraische Geometrie. Geometrie auf einer Kurve. Riemannsche Flächen. Abelsche Integrale. Autorisierte deutsche Ausgabe von E. Löffler. gr. 8. [Erscheint Ende September 1915.]

Staudé, O., analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Fig. VIII, 447 S. gr. 8. 1905. geb. n. *M.* 14.—

— analytische Geometrie des Punktpaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. In 2 Teilbänden. Mit zahlr. Fig. gr. 8. 1910.

I. Teilband: X, 548 S. geh. n. *M.* 20.—, geb. n. *M.* 22.—

II. „ IV, 451 S. geh. n. *M.* 16.—, geb. n. *M.* 18.—

— analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte. Mit 58 Fig. VIII, 242 S. gr. 8. 1913. geh. n. *M.* 9.— geb. n. *M.* 10.—

Study, E., Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. ca. 5 Bände von je 10—12 Bogen. gr. 8. steif geh.

1. Heft: Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. Mit 9 Fig. IV, 126 S. 1911. n. *M.* 4.80.

2. Heft: Unter Mitwirkung von W. Blaschke. Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche. Mit 43 Fig. VIII, 142 S. 1913. n. *M.* 3.60.

